

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**  
**CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**PROBLEMAS DE CONTATO UNILATERAL EM PLACAS SEMI-ESPESSAS SUJEITAS  
A GRANDES DEFLEXÕES**

**DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**MARCO ANTÔNIO LUERSEN**

**FLORIANÓPOLIS, AGOSTO DE 1994.**

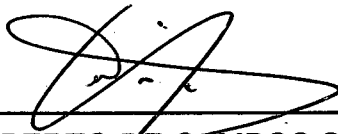
PROBLEMAS DE CONTATO UNILATERAL EM PLACAS SEMI-ESPESSAS SUJEITAS A  
GRANDES DEFLEXÕES

MARCO ANTÔNIO LUERSEN

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A  
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO PROJETO E  
ANÁLISE DE COMPONENTES MECÂNICOS, APROVADA NA SUA FORMA FINAL  
PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA



CARLOS ALBERTO DE CAMPOS SELKE - Ph.D.  
Orientador

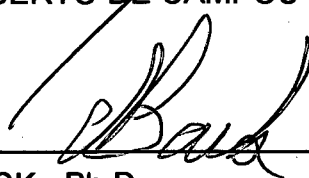


ANTÔNIO FÁBIO CARVALHO DA SILVA - Dr. Eng. Mec.  
Coordenador do Curso

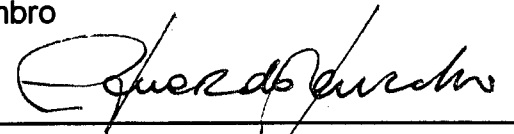
BANCA EXAMINADORA



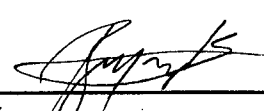
CARLOS ALBERTO DE CAMPOS SELKE - Ph.D.  
Presidente



NELSON BACK - Ph.D.  
Membro



EDUARDO ALBERTO FANCELLO - D.Sc.  
Membro



ROGÉRIO JOSÉ MARCZAK - M. Eng. Mec.  
Membro



*A meus pais, Ilsa e Hugo,  
e a meus irmãos, Ane e Gerson.*

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Prof. Carlos Alberto de Campos Selke, pela prestativa e valiosa orientação deste trabalho, pela formação acadêmica, pela amizade e pelas lições de vida transmitidas.

Aos colegas do GRANTE, particularmente, Jucélio Tomás Pereira, Pablo Andrés Muñoz Rojas, Rogério "Rato" Marczak, Tancredo Westphal Jr., Jun Sérgio Ono Fonseca, Isolene "Sula" Hoffmann, Armando Sá Ribeiro Jr., Marcelo Maldaner, Carlo Giuseppe Filippin, Agenor Dias de Meira Jr., Roberto Gonzaga Gomes Magalhães, Geraldo Belmonte, André Ogliari, José Aguiomar Foggiatto, Antonio André Novotny, Jackson Luís Barp e Luiz Fernando Raminelli pela amizade e agradável convivência proporcionada.

Ao Buba, Joseval, Jucélio, Selke, Rato, Assuite, Tancredo, entre outros, pelos momentos inesquecíveis nas jornadas, conquistas e comemorações futebolísticas durante esse período.

Aos colegas da PG, João Luiz da Costa Gouveia, Luiz Augusto Pretti de Menezes e Marcos Antônio de Andrade Mota pela amizade e companherismo.

À CAPES, pelo indispensável apoio financeiro na forma da bolsa de estudos.

## SUMÁRIO

<b>Lista de Ilustrações</b>	viii
<b>Lista de Tabelas</b>	x
<b>Resumo</b>	xi
<b>Abstract</b>	xii
<b>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</b>	1
1.1 Revisão Bibliográfica	2
1.2 Descrição do Escopo do Trabalho	6
<b>CAPÍTULO 2 - FORMULAÇÃO INCREMENTAL DO PROBLEMA DE MECÂNICA DOS SÓLIDOS COM CONDIÇÕES DE CONTATO UNILATERAL</b>	8
2.1 Elasticidade Finita	8
2.1.1 Definições	9
2.1.1.1 Deformações	11
2.1.1.2 Tensões	14
2.1.2 Forma Incremental do Princípio dos Trabalhos Virtuais	15
2.2 Condições de Contato	19
2.3 Métodos de Solução da Desigualdade Variacional	25
2.3.1 Extremização de Funcionais	27
2.3.2 Método dos Multiplicadores de Lagrange	28
2.3.3 Método da Penalidade	29
2.4 Formulação Lagrangiana Atualizada	33

<b>CAPÍTULO 3 - FORMULAÇÃO DE ELEMENTO FINITO DE PLACA DE MINDLIN-REISSNER, SUJEITO A CONDIÇÕES DE CONTATO UNILATERAL</b>	<b>36</b>
3.1 Relações Cinemáticas para Placas	37
3.1.1 Teoria Clássica de Placas Finas	38
3.1.2 Teoria de Primeira Ordem para Placas Semi-Espessas	39
3.1.3 Teorias de Ordem Superior para Placas	40
3.1.3.1 Teoria de Lo, Christensen e Wu para Placas	40
3.1.3.2 Teoria de Reddy para Placas	41
3.2 Relação Constitutiva Incremental e Relações Deformações-Deslocamentos	42
3.3 Discretização do Princípio dos Trabalhos Virtuais e Obtenção do Elemento Finito de Placa Semi-Espessa	47
3.4 Condições de Contato para Placa de Mindlin Reissner	52
3.5 Integração Numérica e Escolha do Fator de Penalidade	53
<b>CAPÍTULO 4 - RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÃO</b>	<b>57</b>
4.1 Problemas de Estruturas Submetidas a Grandes Deslocamentos	57
4.1.1 Placa Quadrada Engastada	58
4.1.2 Placa Circular Engastada	61
4.2 Problemas de Estruturas Submetidas a Pequenos Deslocamentos e Sujeitas à Restrições Unilaterais	64
4.2.1 Placa Circular Engastada	64
4.2.2 Flexão de uma Viga contra Uma Superfície Rígida	68
4.3 Problemas de Estruturas Submetidas a Grandes Deslocamentos e Sujeitas à Restrições Unilaterais	72
4.3.1 Viga Carregada Uniformemente	72
4.3.2 Placa Quadrada com Carregamento Uniforme	75
<b>CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES</b>	<b>77</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>79</b>

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1: Cinemática do processo incremental de um corpo $\Omega$	10
Figura 2.2: Corpo elástico sujeito a condições de contato unilateral	16
Figura 2.3: Condição de impenetrabilidade	21
Figura 3.1: Elemento estrutural do tipo placa	22
Figura 3.2(a): Esforços resultantes de membrana	46
Figura 3.2(b): Esforços resultantes de flexão	46
Figura 3.3: Elemento isoparamétrico de nove nós (sistema local $(\xi, \eta)$ )	48
Figura 3.4: O método de Newton-Raphson	51
Figura 4.1: Placa quadrada engastada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído - a região hachurada representa o quadrante discretizado	59
Figura 4.2: Discretização da placa (quadrante), com 1, 4 e 16 elementos finitos	59
Figura 4.3: Convergência $h$ - carga total	60
Figura 4.4: Placa circular engastada com carregamento concentrado central	61
Figura 4.5: Placa circular - discretização de um quadrante	61
Figura 4.5: Deslocamento central da placa circular	63
Figura 4.7: Placa circular engastada sujeita a restrição unilateral	65
Figura 4.8: Quadrante discretizado da placa circular	66
Figura 4.9: Deflexão da placa circular engastada	66
Figura 4.10: Distribuição de pressões (normalizadas) na placa circular engastada	68
Figura 4.11: Viga bi-apoiada sob flexão	69
Figura 4.12: Distribuição de pressões ao longo da viga	71



Figura 4.13: Distribuição de pressões normalizadas ao longo da viga, onde  $\bar{q}_i$  é a força de contato por unidade de comprimento e  $z$  a direção axial

(Naghdi & Rubin (1989), p. 253, Figura 3)

71

Figura 4.14: Viga bi-engastada sujeita a condições de contato unilateral

72

Figura 4.15: Deflexão na viga (a) bi-engastada e (b) bi-apoiada

73

Figura 4.16: Deflexão da placa (a) apoiada e (b) engastada

75

Figura 4.17: Influência do fator de penalidade  $\varepsilon$  na solução

76

**LISTA DE TABELAS**

Tabela 4.1: Deslocamento central da placa	60
Tabela 4.2: Deslocamento central da placa circular	63
Tabela 4.3: Deslocamentos no ponto central da viga	69

## RESUMO

Uma formulação incremental, utilizando a versão lagrangiana atualizada do princípio dos trabalhos virtuais, é usada para a obtenção de um elemento finito para a resolução de problemas de placas submetidas a grandes deflexões e sujeitas a condições de contato unilateral, sem atrito. A teoria de placas semi-espessas de Mindlin-Reissner é utilizada e o elemento finito obtido é do tipo lagrangiano isoparamétrico de 9 nós. A desigualdade variacional, característica do problema de contato, é resolvida fazendo-se uso do método da penalidade. Como aplicações, são resolvidos problemas de flexão de placas submetidas a grandes deflexões, sem restrições unilaterais, e problemas de flexão de vigas e de placas submetidas a pequenas e grandes deflexões, tendo como restrição unilateral uma superfície rígida plana. Uma análise da influência do fator de penalidade na obtenção da solução aproximada é realizada.

## **ABSTRACT**

An incremental formulation, using the lagrangian updated version of the virtual work principle is used to obtain a finite element to solve plate bending problems undergoing large deflections with frictionless unilateral contact conditions. The Mindlin-Reissner theory of thick plates is used and the finite element obtained is an isoparametric lagrangian type of nine nodes. The variational inequality, typical of contact problems, is solved by using the penalty method. Plate bending problems undergoing large deflections without unilateral constraints, and beam and plate bending problems undergoing small and large deflections with unilateral constraints, such as a plane rigid surface are solved, using the finite element obtained. An analysis of the influence of the penalty parameter in the approximated solution is performed.

# **CAPÍTULO 1**

## **INTRODUÇÃO**

---

O contato entre corpos é um fenômeno que sempre acompanhou a vida e a evolução do homem, sendo talvez o mais antigo problema prático da mecânica dos sólidos. Sempre que se transmite cargas para uma estrutura e desta para seus suportes, isto é feito fisicamente por intermédio do contato entre corpos. Mesmo sendo um fator fundamental na análise estrutural e projeto de componentes, sua influência raramente é levada em consideração. A dificuldade de se estudar o problema de contato, no contexto da mecânica dos sólidos e mecânica estrutural, advém do fato de ele ser um fenômeno inteiramente não-linear, mesmo utilizando-se teorias lineares na formulação do problema de mecânica do contínuo. Antes de se aplicar as cargas a área de contato é desconhecida, ocorrendo um fenômeno físico complexo nessas regiões, requerendo, para sua modelagem, algumas considerações físicas e matemáticas especiais. A modelagem do problema de contato unilateral de um corpo elástico com uma superfície rígida, com ou sem atrito, tem sido objeto de inúmeros estudos, sendo bem conhecido o problema de Signorini que resulta desta modelagem (Duvaut & Lions, 1976).

No trabalho aqui apresentado é feito um estudo numérico de problemas de contato unilateral em placas, utilizando-se um elemento finito lagrangiano de nove nós. Este elemento é obtido a partir da versão lagrangiana incremental atualizada do princípio dos trabalhos virtuais, sendo utilizado para a análise de problemas de flexão

de placas submetidas à grandes deflexões e sujeitas a condições de contato unilateral local, sem atrito. A teoria de placas de primeira ordem de Mindlin-Reissner (teoria de placas semi-espessas) é utilizada e a desigualdade variacional, característica do problema de contato, é resolvida através do método da penalidade. Para evitar o fenômeno do *locking* (travamento), a técnica da integração reduzida seletiva é utilizada.

Entre outros problemas práticos, o elemento finito aqui desenvolvido pode ser utilizado na solução de problemas de contato de placas-base de reservatórios.

A seguir é feita uma revisão bibliográfica de modo a fornecer subsídios para um melhor entendimento do trabalho e sua importância no contexto das pesquisas na área em questão.

## 1.1 Revisão Bibliográfica

Timoshenko & Woinowsky-Krieger (1959) apresentam soluções analíticas para flexão de placas circulares, restringidas por superfícies rígidas horizontais, paralelas à superfície média da placa indeformada, utilizando a teoria clássica de placas. Nesta teoria, a hipótese de Kirchhoff (ver Capítulo 3) é considerada e são usadas as relações deformações-deslocamentos da elasticidade linear, sendo portanto essas soluções válidas apenas para placas submetidas à pequenos deslocamentos.

Já Duvaut & Lions (1974), fazem um estudo de flexão de placas submetidas a grandes deflexões e sujeitas a restrições unilaterais, utilizando a teoria de placas de von Karman, onde a hipótese de Kirchhoff continua válida, mas nas equações de equilíbrio e de deformações-deslocamentos é introduzida a influência das rotações moderadamente grandes (Fung, 1965), sendo as deformações e o quadrado das rotações pequeno se comparados com a unidade. A teoria de von Karman apresenta boa precisão para análise de placas finas e sujeitas à deflexões da ordem da espessura da placa, no máximo.

Grande parte dos trabalhos sobre vigas e placas com contato unilateral consideram a teoria clássica de flexão de placas e vigas. Nestas teorias, é utilizada a hipótese segundo a qual a normal à superfície de referência da placa, ou do eixo centroidal da viga, em qualquer ponto na configuração indeformada permanece normal a ela também na configuração deformada e seu comprimento permanece o mesmo. Tais hipóteses descartam os efeitos da deformação cisalhante transversal e da deformação normal transversal. Na imposição de condições de contato unilaterais, o uso dessas teorias clássicas introduz inconsistências físicas pois ocorrerão deformações normais e cisalhantes transversais, ocasionando descontinuidades das tensões resultantes de cisalhamento na fronteira da região de contato, ficando assim o modelo incapaz de prever corretamente a força transmitida da superfície que restringe o deslocamento para a estrutura. Utilizando a teoria de placa de primeira ordem de Mindlin-Reissner, na qual a deformação cisalhante transversal é levada em consideração, tenta-se remover estas inconsistências (Essenburg, 1962). Entretanto, algumas limitações ainda permanecem, tais como previsões pouco precisas do valor das forças na fronteira da região de contato, e da ocorrência de regiões de separação, ou de descolamento. Para remover estas inconsistências, utilizam-se teorias de ordem superior, incluindo o efeito da deformação normal transversal (Reissner, 1981). Para o estudo de vigas, Essenburg (1975) introduziu esta formulação, tendo ela sido utilizada na resolução do problema de flexão de uma viga contra uma superfície rígida. Selke & Kikuchi (1987) utilizam esta mesma formulação para resolver problemas numéricos de flexão e flambagem de vigas, através do método dos elementos finitos, fazendo uma comparação com a teoria clássica de vigas. Também Naghdi & Rubin (1989) apresentam um estudo teórico do problema de flexão de uma viga em contato com uma superfície rígida plana, utilizando a teoria clássica (hipóteses de Euler-Bernoulli), uma teoria de primeira ordem (viga de Timoshenko), que inclui o efeito da deformação cisalhante transversal, uma teoria incluindo o efeito da deformação normal transversal e outra englobando as últimas duas, isto é, os efeitos da deformação normal transversal e da deformação cisalhante transversal. As regiões de separação são

simuladas apenas nos casos em que se modela o problema utilizando uma teoria que considera a deformação normal transversal.

Nos problemas de contato as condições a serem aplicadas no contorno da estrutura diferem das usuais da mecânica dos sólidos e mecânica estrutural, pois as regiões de contato não são conhecidas *a priori*. Assim, eles são incluídos nos chamados problemas de fronteira livre. Devido à unilateralidade das condições de contorno de contato, o problema pode ser representado através de inequações ou de desigualdades variacionais (Duvaut & Lions, 1976). Estas desigualdades podem ser resolvidas através da utilização de técnicas de programação matemática não-linear ou através da transformação das mesmas em igualdades, resultantes da imposição das restrições de contato, utilizando-se os métodos da penalidade, multiplicadores de Lagrange (Kikuchi & Oden, 1984), lagrangiano perturbado (Simo, Wriggers & Taylor, 1985) ou o método do lagrangiano aumentado (Simo & Laursen, 1992). Os dois últimos podem ser considerados uma generalização dos dois primeiros (Hunek, 1993). No caso do atrito não ser desprezado, deve-se utilizar o método da regularidade.

As desigualdades variacionais, juntamente com métodos numéricos para discretização do domínio, tal como o método dos elementos finitos, constituem uma técnica natural, elegante e poderosa para a resolução de problemas de fronteira livre. Oden & Kikuchi (1982) apresentam uma base matemática para problemas de restrições em elasticidade, dando especial atenção ao método da penalidade, e resolvendo numericamente problemas de contato, sem atrito, da mecânica do contínuo. Kikuchi & Oden (1984) desenvolvem um estudo detalhado sobre problemas de contato unilateral, com e sem atrito, na mecânica do contínuo, utilizando o método dos elementos finitos e resolvendo a desigualdade através dos métodos da penalidade e da regularidade.

Poucos trabalhos utilizando métodos numéricos aplicados ao problema de flexão de placas sujeitas à condições de contato foram publicados, podendo-se destacar os de Ohtake, Oden & Kikuchi (1980), que utilizam a teoria de placas de von Karman, analisando problemas de flexão e flambagem. São utilizados elementos



finitos da classe  $C^1$  para deslocamento transversal e  $C^0$  para os deslocamentos no plano da placa, bem como o método da penalidade para resolver a desigualdade variacional.

Na modelagem de placas via método dos elementos finitos, utilizando a teoria de Mindlin-Reissner, pode ocorrer o fenômeno do *shear locking* (travamento de cisalhamento) quando a espessura da placa se torna muito pequena. Este fenômeno é caracterizado por apresentar uma excessiva rigidez à flexão (Hughes, 1987; Cook, Malkus & Plesha, 1988). Tal problema pode ser evitado utilizando a chamada subintegração seletiva, isto é, subintegra-se numericamente apenas a parcela relativa à deformação cisalhante transversal. Zienkiewicz, Taylor & Too (1971) foram os pioneiros na utilização desta técnica, aplicando-a a um elemento de placa de oito nós. No trabalho de Malkus & Hughes (1978) é feita uma unificação dos conceitos de integração reduzida e seletiva e da formulação de elementos finitos mistos, sendo este também um dos trabalhos pioneiros da aplicação do método da penalidade a problemas da elasticidade incompressível. Hughes, Cohen & Haroun (1978) fazem um estudo da técnica da integração reduzida e seletiva aplicada à elementos finitos de placa, analisando o fenômeno do *locking*. Também utilizando esta técnica, Pica, Wood & Hinton (1980) apresentam uma formulação para problemas de flexão de placas com não linearidade geométrica, utilizando a teoria de placas de Mindlin-Reissner e uma abordagem lagrangiana total.

O procedimento de integração reduzida pode trazer o problema de modos espúrios (modos de deformação associados à energia nula). Wong & Belytschko (1987), White & Abel (1990), Mourão & Selke (1992) fazem controle de modos espúrios através de técnicas de estabilização, inibindo sua manifestação. O primeiro aplicado aos elementos lagrangianos de nove nós de elasticidade plana e de placa e os dois últimos ao elemento de casca degenerado de nove nós, com formulação para grandes deslocamentos. No caso de elementos de casca a subintegração é feita para evitar o *locking* de cisalhamento e o *locking* de membrana.

Da mesma forma que ocorre *locking* de cisalhamento em elementos de placa, a imposição de condições de contato também pode levar a uma excessiva rigidez (Ohtake, Oden & Kikuchi, 1980; Kikuchi & Oden, 1984), sendo a subintegração da parcela de penalidade um dos meios mais utilizados para contornar o problema. Outros casos onde são utilizados o método da penalidade, tais como incompressibilidade de sólidos e fluidos, ocorrem problemas de travamento, e técnicas similares de resolvê-los são empregadas (Oden & Kikuchi, 1982; Fonseca, 1990).

## 1.2 Descrição do Escopo do Trabalho

Os assuntos abordados em cada Capítulo são descritos a seguir.

Uma revisão bibliográfica, foi apresentada na seção 1.1 deste Capítulo.

No Capítulo 2, alguns conceitos de elasticidade finita, necessários para o desenvolvimento do trabalho são apresentados e uma formulação lagrangiana incremental, utilizando o princípio dos trabalhos virtuais, é desenvolvida e particularizada para sua forma atualizada. Obtém-se condições de contato linearizadas, que são introduzidas na versão lagrangiana incremental do princípio dos trabalhos virtuais. A desigualdade variacional assim obtida é resolvida através do método da penalidade, discutindo-se também alguns aspectos matemáticos deste método.

No Capítulo 3 particulariza-se a versão incremental do princípio dos trabalhos virtuais, na sua forma lagrangiana atualizada, bem como as condições de contato, para o caso de placa de Mindlin-Reissner. Em seguida estas equações são discretizadas, utilizando um elemento finito isoparamétrico lagrangiano de nove nós. Detalhes numéricos como integração e escolha do fator de penalidade também são abordados neste Capítulo.

Por sua vez, o Capítulo 4 analisa e discute vários problemas de placas submetidas a pequenas e grandes deflexões, sob condições de contato unilateral, solucionados numericamente através de um código computacional gerado em

linguagem FORTRAN, em que foi implementado o elemento finito lagrangiano de nove nós. São feitas comparações com resultados analíticos e numéricos obtidos da literatura.

Para finalizar, no Capítulo 5 são apresentadas conclusões e algumas sugestões para continuidade desta linha de trabalho.

## **CAPÍTULO 2**

# **FORMULAÇÃO INCREMENTAL DO PROBLEMA DE MECÂNICA DOS SÓLIDOS COM CONDIÇÕES DE CONTATO UNILATERAL**

---

Neste capítulo são apresentadas algumas noções básicas de elasticidade finita, e é obtida uma formulação lagrangiana incremental para o problema de mecânica do contínuo, sujeito a restrições unilaterais. Condições de contato incrementais linearizadas são obtidas e introduzidas na forma incremental do princípio dos trabalhos virtuais, resultando em uma desigualdade variacional, a qual é resolvida através do método da penalidade. Adicionalmente, alguns detalhes matemáticos do método da penalidade são abordados, para maior clareza da formulação desenvolvida.

### **2.1 Elasticidade Finita**

Em problemas de mecânica dos sólidos, quando os deslocamentos da estrutura em análise são grandes, não se pode mais confundir as configurações final e inicial,

como é feito na teoria clássica da elasticidade linear, havendo a necessidade de utilização de formulações que levem em consideração as mudanças em sua geometria.

As formulações para problemas com grandes deslocamentos classificam-se, conforme a configuração de referência utilizada, em lagrangiana e euleriana (Atkin & Fox, 1980). A formulação lagrangiana utiliza as chamadas coordenadas materiais, ou lagrangianas, que são as da configuração indeformada. Na formulação euleriana utilizam-se as coordenadas espaciais, ou eulerianas, do estado deformado.

Para a solução de problemas através da formulação lagrangiana, duas estratégias podem ser usadas, conforme a escolha da configuração de referência (Gadala & Oravas, 1984): a formulação lagrangiana total e a lagrangiana atualizada. Em ambas as formulações o carregamento total é aplicado em incrementos de carga (passos). Na formulação lagrangiana total, o estado anterior à aplicação das cargas é o de referência. Já na formulação lagrangiana atualizada a referência é um estado intermediário, já totalmente determinado, acompanhando a configuração deformada.

Todas essas formulações são matematicamente corretas, sendo as formulações lagrangianas mais adequadas para problemas da mecânica dos sólidos, e a formulação euleriana para problemas da mecânica dos fluidos.

Neste trabalho adotou-se uma formulação lagrangiana atualizada, por permitir maior facilidade na obtenção de resultados intermediários e proporcionar menor esforço numérico (Fonseca, 1990).

### 2.1.1 Definições

Nesta seção apresentam-se alguns conceitos essenciais para o estudo do processo incremental de deformação, tomando-se como referencial a forma de apresentação de Washizu (1982).

Seja um corpo sólido deformável em um instante  $t_0$  denotado por  $\Omega_0$ . Um ponto  $P_0$  é identificado por um vetor posição  $\mathbf{x}$ , em relação a um sistema de referência

retangular cartesiano (ver Figura 2.1). Seguindo o processo de deformação do corpo em incrementos, tem-se que em um instante  $t$ , o ponto  $P_0$  da configuração  $\Omega_0$  se encontra na posição  $P_n$ , na configuração  $\Omega_n$ , sendo posicionado pelo vetor posição  $X$ . Ainda dentro do processo incremental define-se uma configuração  $\Omega_{n+1}$ , próxima de  $\Omega_n$ , onde a partícula que ocupava  $P_n$  em  $\Omega_n$ , ocupa agora a posição  $P_{n+1}$ , sendo seu vetor posição denotado por  $Y$ .

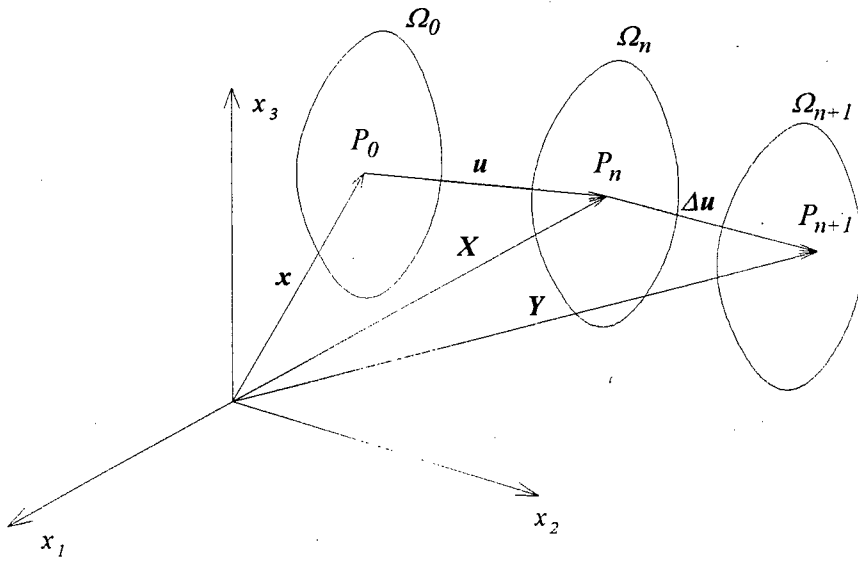


Figura 2.1: Cinemática do processo incremental de um corpo  $\Omega$ .

O vetor deslocamento  $u$ , portanto, é definido como

$$u = X - x \quad (2.1)$$

e o vetor incremento de deslocamento  $\Delta u$  (deslocamento entre duas configurações sucessivas  $\Omega_n$  e  $\Omega_{n+1}$ ) como

$$\Delta u = Y - X. \quad (2.2)$$

Assim, se a formulação for lagrangiana total, a referência é a configuração inicial  $\Omega_0$ . Na formulação lagrangiana atualizada, cada incremento é analisado tomando-se como referência sua configuração inicial, ou seja, o incremento que leva o corpo da configuração  $\Omega_n$  para  $\Omega_{n+1}$  terá como referência a configuração  $\Omega_n$ .

### 2.1.1.1 Deformações

Primeiramente, define-se as componentes do tensor gradiente de deformação  $F$  como (Washizu, 1982)

$$F_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \quad (2.3)$$

$F$  é em geral um tensor não simétrico e, por incorporar as rotações e deslocamentos de corpo rígido, não é invariante a esses tipos de movimentos. Devido a isto, outros tensores de medida de deformação são utilizados em elasticidade finita, tais como os tensores de Cauchy-Green, os quais se caracterizam por serem simétricos e unitários para movimentos de corpo rígido.

O tensor de Cauchy-Green à direita é definido, em notação matricial, como

$$C = F^T F \quad (2.4)$$

ou, em termos de componentes, como<sup>1</sup>.

$$C_{ij} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \quad (2.5)$$

Por sua vez, o tensor de Cauchy-Green à esquerda é definido por

---

<sup>1</sup> É utilizada a notação soma de Einstein, onde os índices latinos variam de 1 a 3.

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T, \quad (2.6)$$

ou, em termos de componentes, por

$$B_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial X_j}{\partial x_k}. \quad (2.7)$$

Os tensores de Green (ou Green-Lagrange) e Almansi também são extensivamente usados como medidas de deformação, sendo que ambos são simétricos e se anulam para movimentos de corpo rígido. O tensor deformação de Green  $\mathbf{E}$  é definido como

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad \text{ou} \quad E_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ij} - \delta_{ij}), \quad (2.8)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker, sendo  $\mathbf{E}$  utilizado para descrições lagrangianas de movimentos e, o tensor de Almansi  $\boldsymbol{\gamma}$  é definido como

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \quad \text{ou} \quad \gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - B_{ij}^{-1}), \quad (2.9)$$

tendo seu uso em descrições eulerianas de movimento.

Em termos dos vetores posição, as componentes do tensor deformação de Green podem ser escritas como

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} - \delta_{ij} \right). \quad (2.10)$$

De acordo com (2.1),  $u_i = X_i - x_i$ , e este tensor deformação pode ser escrito como



$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right), \quad (2.11)$$

em termos dos deslocamentos. Mantendo-se as duas primeiras parcelas entre parênteses obtém-se a versão linearizada deste tensor. A terceira parcela caracteriza o aspecto não-linear deste tensor.

Aplicando-se um incremento de deslocamento ao corpo ( $u_i \rightarrow u_i + \Delta u_i$ ), pode-se obter o chamado tensor incremento total de deformação de Green

$$\Delta E_{ij} = \frac{1}{2} \left[ (\delta_{kj} + u_{k,j}) \Delta u_{k,i} + (\delta_{ki} + u_{k,i}) \Delta u_{k,j} + \Delta u_{k,i} \Delta u_{k,j} \right], \quad (2.12)$$

onde adotou-se a notação  $(\cdot)_{,i}$  para representar  $\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i}$ .

Adotando-se uma definição alternativa para o incremento de deformação do passo  $n+1$ , considerando como referência a configuração  $\Omega_n$ , tem-se

$$\Delta^* E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_i} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_j} \right). \quad (2.13)$$

$\Delta^* E$  é chamado de tensor incremento de deformação de Green atualizado. Novamente, a manutenção das duas primeiras parcelas em (2.13), dentro do parênteses, leva à versão linearizada do tensor  $\Delta^* E$ , sendo que a lei de transformação entre os incrementos total e atualizado é dada por

$$\Delta^* E_{ij} = \Delta E_{kl} \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_l}{\partial X_j}. \quad (2.14)$$

Considerando-se as configurações  $\Omega_n$  e  $\Omega_{n+1}$  suficientemente próximas, a versão linearizada do tensor  $\Delta^* E$  é escrita como

$$\Delta^* \varepsilon_{ij} \cong \Delta^* E_{ij} \cong \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial X_i} \right). \quad (2.15)$$

### 2.1.1.2 Tensões

Com o intuito de escrever as relações constitutivas na forma incremental, para formulações lagrangianas, é necessário definir alguns tipos alternativos de tensores tensão, bem como relações entre eles. Uma descrição bastante detalhada sobre estes tensores é dada por Washizu (1982).

Para uma descrição euleriana, onde a referência é a configuração final, o tensor comumente usado é o tensor tensão de Cauchy, aqui denotado por  $\sigma$ . Para descrições lagrangianas, os tensores de Piola-Kirchhoff são utilizados, sendo que o segundo tensor de Piola-Kirchhoff é usado com maior frequência por ser simétrico, apesar de não possuir interpretação física direta. O primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff  $T$  é definido como (Atkin & Fox, 1980)

$$T = J_n F^{-1} \sigma, \quad (2.16)$$

ou, em termos de componentes

$$T_{ij} = J_n \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \sigma_{kj}. \quad (2.17)$$

O segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff  $S$  é definido como

$$S = J_n F^{-1} \sigma (F^{-1})^T \quad \text{ou} \quad S_{ij} = J_n \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \sigma_{kl} \frac{\partial x_l}{\partial X_j}, \quad (2.18)$$

onde  $J_n = \det F$  é o jacobiano da transformação. A interpretação física de  $J_n$  é a relação entre as densidades do corpo nos estados  $\Omega_o$  e  $\Omega_n$ , ou seja,  $J_n = \frac{\rho_o}{\rho_n}$ .

Define-se ainda os incrementos do segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff, sendo  $\Delta S$  o tensor incremento total (isto é, o acréscimo devido à passagem da configuração  $\Omega_n$  para a  $\Omega_{n+1}$ ), onde a referência é a configuração inicial  $\Omega_o$ ; e  $\Delta^* S$  o tensor incremento atualizado, onde a referência é a configuração  $\Omega_n$ . A relação entre eles é dada por

$$\Delta^* S_{ij} = \frac{1}{J_n} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial X_j}{\partial x_l} \Delta S_{kl} . \quad (2.19)$$

No final do incremento (configuração  $\Omega_{n+1}$ ), as componentes do tensor de Cauchy  $\sigma + \Delta \sigma$  são dadas por

$$\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij} = \frac{1}{\Delta J} \frac{\partial Y_i}{\partial X_k} \frac{\partial Y_j}{\partial X_l} (\sigma_{kl} + \Delta^* S_{kl}) , \quad (2.20a)$$

ou, em termos das componentes do segundo tensor de Piola-Kirchhoff e seu incremento total

$$\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij} = \frac{1}{J_{n+1}} \frac{\partial Y_i}{\partial x_k} \frac{\partial Y_j}{\partial x_l} (S_{kl} + \Delta S_{kl}) \quad (2.20b)$$

onde

$$\Delta J = \frac{J_{n+1}}{J_n} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial X_2} & \frac{\partial Y_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_2}{\partial X_2} & \frac{\partial Y_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial Y_3}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_3}{\partial X_2} & \frac{\partial Y_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} . \quad (2.21)$$

### 2.1.2 Forma Incremental do Princípio dos Trabalhos Virtuais

Seja um corpo deformável  $\Omega$  de densidade  $\rho$ , submetido a um conjunto de cargas  $t^F$  no contorno  $\Gamma_F$ , forças de corpo  $b$  e restrições de deslocamento em  $\Gamma_D$ , e tendo o seu processo de deformação restringido unilateralmente em  $\Gamma_C$ , não conhecida *a priori*, por uma superfície rígida, conforme mostrado na Figura 2.2.

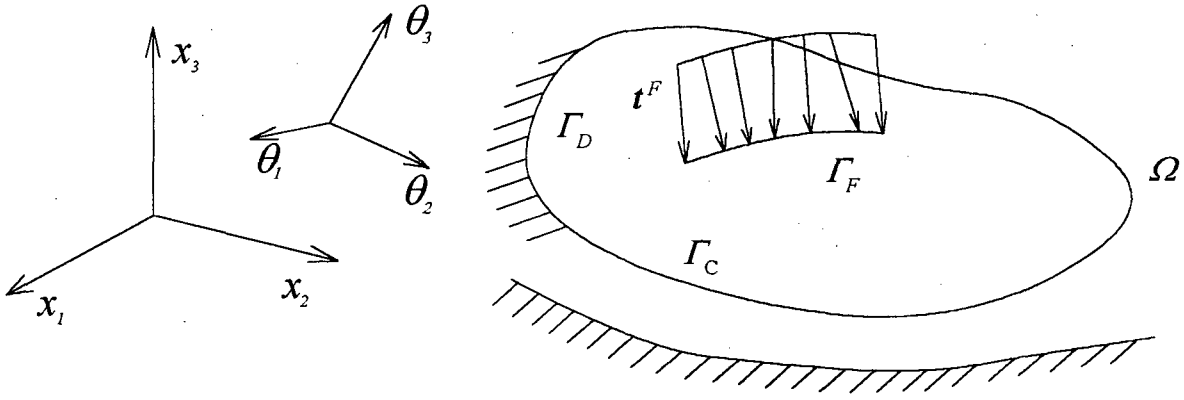


Figura 2.2: Corpo elástico sujeito a condições de contato unilateral.

Se o corpo  $\Omega$  está em equilíbrio, na configuração  $\Omega_n$ , as seguintes equações de equilíbrio são válidas

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_j} + \rho b_i = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (2.22)$$

sendo que o corpo  $\Omega$  está sujeito às seguintes condições de contorno

$$u_i = g_i \quad \text{em } \Gamma_D \quad (2.23a)$$

e

$$\sigma_{ji} n_j = t_i^F \quad \text{em } \Gamma_F \quad (2.23b)$$

onde  $g_i$  são as componentes dos deslocamentos prescritos na região  $\Gamma_D$ ,  $t_i^F$  as componentes prescritas do vetor tração na superfície  $\Gamma_F$  e  $n_j$  as componentes do vetor normal ao contorno  $\Gamma$  do corpo  $\Omega$ . As restrições devido ao contato na região  $\Gamma_C$  serão impostas posteriormente.

Este problema pode ser representado a partir do princípio dos trabalhos virtuais, para a configuração corrente, como

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \rho b_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_F} t_i^F \delta u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_C} t_i^C \delta u_i d\Gamma$$

$$\forall \delta u_i \mid \delta u_i = 0 \text{ em } \Gamma_D, \quad (2.24)$$

o qual também é chamado de forma fraca das equações de equilíbrio, sendo  $t_i^C$  as componentes da tração na superfície de contato  $\Gamma_C$ , desconhecidas *a priori*.

Em relação à configuração inicial, o princípio dos trabalhos virtuais pode ser escrito como

$$\int_{\Omega_0} S_{ij} \delta E_{ij} d\Omega = \int_{\Omega_0} b_{0i} \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_{R0}} t_{0i}^F \delta u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{C0}} t_{0i}^C \delta u_i d\Gamma$$

$$\forall \delta u_i \mid \delta u_i = 0 \text{ em } \Gamma_{D_0} \quad (2.25)$$

onde  $b_0$  é o vetor força de corpo no estado  $\Omega_0$ ;  $t_0^F$  e  $t_0^C$  são os vetores trações nas regiões  $\Gamma_{F_0}$  e  $\Gamma_{C_0}$  que são regiões correspondentes a  $\Gamma_F$  e  $\Gamma_C$ , quando do início do processo de deformação, e  $\delta E_{ij}$  as componentes do tensor deformação virtual de Green, dadas por

$$\delta E_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i} + u_{k,i} \delta u_{k,j} + u_{k,j} \delta u_{k,i}) \quad (2.26)$$

Considerando a situação em que o corpo passa da configuração  $\Omega_n$  para a configuração  $\Omega_{n+1}$ , sujeito a um incremento de deslocamento  $\Delta u$ , causado por

incrementos de forças de corpo  $\Delta b$  e trações na superfície  $\Delta t^F$  e  $\Delta t^C$ , produzindo-se um incremento de tensão  $\Delta S$ , o princípio dos trabalhos virtuais é escrito como (Washizu, 1982)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} (S_{ij} + \Delta S_{ij}) \delta(E_{ij} + \Delta E_{ij}) d\Omega &= \int_{\Omega_0} (b_{0i} + \Delta b_{0i}) \delta u_i d\Omega + \\ &+ \int_{\Gamma_{F0}} (t_{0i}^F + \Delta t_{0i}^F) \delta u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{C0}} (t_{0i}^C + \Delta t_{0i}^C) \delta u_i d\Gamma \\ \forall \delta u_i \mid \delta u_i &= 0 \text{ em } \Gamma_{D0}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Assim, desprezando termos de ordem superior, o princípio dos trabalhos virtuais em uma forma incremental, utilizando a configuração  $\Omega_0$  como referência, é escrito como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} (\Delta S_{ij} \delta E_{ij} + S_{ij} \Delta u_{k,i} \delta u_{k,j}) d\Omega &= \int_{\Omega_0} \Delta b_{0i} \delta u_i d\Omega + \\ &+ \int_{\Gamma_{F0}} \Delta t_{0i}^F \delta u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{C0}} \Delta t_{0i}^C \delta u_i d\Gamma + R_0 \\ \forall \delta u_i \mid \delta u_i &= 0 \text{ em } \Gamma_{D0} \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde

$$R_0 = - \int_{\Omega_0} S_{ij} \delta E_{ij} d\Omega + \int_{\Omega_0} b_{0i} \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_{F0}} t_{0i}^F \delta u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{C0}} t_{0i}^C \delta u_i d\Gamma, \quad (2.29)$$

ou, se a referência for outra configuração qualquer  $\Omega_R$ , tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_R} (\Delta S_{ij} \delta E_{ij} + S_{ij} \Delta u_{k,i} \delta u_{k,j}) d\Omega &= \int_{\Omega_R} \Delta b_{Ri} \delta u_i d\Omega + \\ &+ \int_{\Gamma_{FR}} \Delta t_{Ri}^F \delta u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{CR}} \Delta t_{Ri}^C \delta u_i d\Gamma + R \\ \forall \delta u_i \mid \delta u_i &= 0 \text{ em } \Gamma_{DR} \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde  $R$ , neste caso, é dado por:

$$R = - \int_{\Omega_R} S_{ij} \delta E_{ij} d\Omega + \int_{\Omega_R} b_{Ri} \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_{FR}} t_{Ri}^F \delta u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{CR}} t_{Ri}^C \delta u_i d\Gamma. \quad (2.31)$$

$R$  pode ser interpretado como uma energia residual, sendo teoricamente nula se o corpo estiver em equilíbrio, isto é, o trabalho virtual realizado pelas forças internas é igual ao trabalho virtual realizado pelas forças externas. Entretanto, utilizando a formulação incremental, o corpo pode não estar em perfeito equilíbrio em cada incremento devido às linearizações feitas e, desta forma, é importante que este termo permaneça nas equações, de modo a verificar se o equilíbrio é satisfeito. Critérios de tolerância aplicados a este termo podem ser utilizados como medida da precisão da solução aproximada a ser obtida através desta formulação.

## 2.2 Condições de Contato

Seja o corpo  $\Omega$  representado na Figura 2.2, com dois sistemas de coordenadas, um global  $(x_1, x_2, x_3)$  e outro local  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ , e seja  $\theta_3 = \phi(\theta_1, \theta_2)$  e  $\theta_3 = \psi(\theta_1, \theta_2)$  as superfícies que delimitam o corpo e a fundação rígida, respectivamente, e  $\eta = \eta_i e_i$  o vetor deslocamento no contorno do corpo. Se  $\eta$  for escrito em função de  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , a condição de impenetrabilidade é dada por

$$\phi(\theta_1, \theta_2) + \eta_3(\theta_1, \theta_2) \geq \psi(\theta_1 + \eta_1(\theta_1, \theta_2), \theta_2 + \eta_2(\theta_1, \theta_2)). \quad (2.32)$$

Aplicando uma expansão em série de Taylor em  $\psi$  e desprezando termos de ordem superior, pois os deslocamentos  $\eta_i$  são considerados pequenos, tem-se

$$\phi + \eta_3 \geq \psi + \eta_1 \frac{\partial \psi}{\partial \theta_1} + \eta_2 \frac{\partial \psi}{\partial \theta_2}, \quad (2.33)$$

que também pode ser escrito da seguinte maneira

$$\eta \cdot (\psi_{,1} e_1 + \psi_{,2} e_2 - e_3) - (\phi - \psi) \leq 0 . \quad (2.34)$$

Observando que

$$\nu = \nu_i e_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta_2}\right)^2}} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta_1} e_1 + \frac{\partial \psi}{\partial \theta_2} e_2 - e_3 \right) \quad (2.35)$$

é o vetor normal unitário interior da superfície rígida (ver Figura 2.3), e multiplicando-se a expressão (2.34) por  $\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta_2}\right)^2}}$ , obtém-se

$$\nu_i \eta_i - g_N \leq 0 \quad \text{ou} \quad \eta_N - g_N \leq 0 , \quad (2.36)$$

onde

$$g_N = \frac{\phi - \psi}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta_2}\right)^2}} . \quad (2.37)$$

Seja  $N = N_i i_i$  a normal  $\nu$  escrita com referência ao sistema de coordenadas global, e  $u = u_i i_i$  o deslocamento, também em coordenadas globais, e como  $\nu \cdot \eta = N \cdot u$ , a condição de impenetrabilidade (2.36) pode ser escrita como

$$N_i u_i - g_N \leq 0 \quad \text{ou} \quad u_N - g_N \leq 0 . \quad (2.38)$$

Como apenas foi feita a linearização de  $\psi$  (expansão em série de Taylor desprezando-se termos de ordem superior), (2.36) e (2.38) são exatas se a fundação



rígida for plana e, caso for curva, só são exatas se a direção  $\theta_3$  coincidir com a direção do deslocamento, isto é,  $\eta_1(\theta_1, \theta_2) = \eta_2(\theta_1, \theta_2) = 0$ .

A condição (2.36) significa que a componente normal do deslocamento em relação à superfície de contato deve ser menor ou igual à projeção da distância das duas superfícies ( $\phi$  e  $\psi$ ) nesta mesma direção (Figura 2.3), sendo que um ponto  $P$  na superfície  $\phi$ , estará sempre acima ou sobre o plano tangente  $A$ .

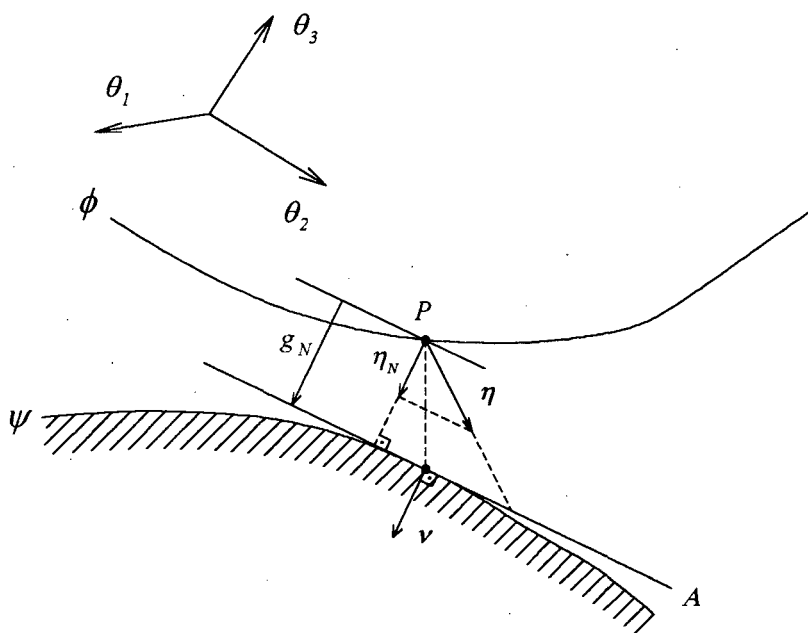


Figura 2.3: Condição de impenetrabilidade.

Para a obtenção das condições de contato, considerou-se que o corpo em análise está posicionado acima da superfície rígida, com relação à coordenada local  $\theta_3$ . Se ele estiver abaixo, o sinal de desigualdade da condição (2.32) muda de direção mas (2.36) permanece inalterada, pois os sinais das componentes do vetor unitário normal  $v$  devem ser trocados.

Assim, a condição de impenetrabilidade na forma incremental pode ser escrita, a partir de (2.36), como a condição de contorno de Signorini (Duvaut & Lions, 1976),

$$\Delta u_N - \Delta g_N \leq 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_C \quad (2.39)$$

onde

$$\Delta u_N = N_i \Delta u_i \quad (2.40)$$

e

$$\Delta g_N = \frac{\phi(X_1, X_2) - \psi(X_1, X_2)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X_2}\right)^2}} \quad (2.41)$$

Analisa-se agora as condições de contato relacionadas com as forças. Sejam  $t_\alpha(X + \Delta u)$  os vetores tração de Cauchy no contorno de contato  $\Gamma_C$ . Após uma expansão em série de Taylor, obtém-se as componentes normal e tangencial na superfície de contorno  $\Gamma_C$ , dadas respectivamente por

$$t_N(X + \Delta u) \doteq t_N(X) + \Delta t_N(X) \quad (normal) \quad (2.42a)$$

e

$$t_T(X + \Delta u) \doteq t(X + \Delta u) - t_N(X + \Delta u) \mathbf{n} \quad (tangencial) \quad (2.42b)$$

onde  $\mathbf{n}$  é a normal à superfície  $\Gamma_C$  e  $\mathbf{t} = \sigma_{ij}(X) n_j(X) \mathbf{e}_i$ , o vetor tração no contorno, sendo  $\sigma_{ij}$  as componentes do tensor tensão de Cauchy.

Se não ocorrer contato,  $t_N = 0$ . Caso o contato do corpo  $\Omega$  com a superfície rígida seja sem atrito, as componentes tangenciais são nulas. Com isso, tem-se

$$\begin{aligned} t_T(X + \Delta u) = 0 \quad e \quad t_N(X + \Delta u) = 0 \quad & \text{se} \quad \Delta u_N - \Delta g_N < 0, \\ t_T(X + \Delta u) = 0 \quad e \quad t_N(X + \Delta u) < 0 \quad & \text{se} \quad \Delta u_N - \Delta g_N = 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Combinando as equações (2.39) e (2.43) obtém-se as condições gerais de contato para uma fundação rígida

$$\begin{aligned}
\Delta u_N(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \Delta g_N(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &\leq 0 \\
t_N(\mathbf{x} + \mathbf{u}) + \Delta t_N(\mathbf{x} + \mathbf{u}) &\leq 0 \\
t_T(\mathbf{x} + \mathbf{u}) + \Delta t_T(\mathbf{x} + \mathbf{u}) &= 0 \\
[t_N(\mathbf{x} + \mathbf{u}) + \Delta t_N(\mathbf{x} + \mathbf{u})][\Delta u_N(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \Delta g_N(\mathbf{x}, \mathbf{u})] &= 0 \quad \text{em } \Gamma_C.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

As condições de contato obtidas anteriormente estão escritas para a configuração corrente. Para introduzir essas condições na expressão do princípio dos trabalhos virtuais na sua forma lagrangiana incremental (2.28), há a necessidade de transformá-las para uma configuração de referência. Decompondo o produto interno do vetor tração com o deslocamento virtual, em componentes tangenciais e normais, tem-se

$$t_{R_i}^C \delta u_i = t_{R_N}^C \delta u_N + t_{R_T}^C \delta u_T, \tag{2.45}$$

e seu incremento, dado por

$$\Delta t_{R_i}^C \delta u_i = \Delta t_{R_N}^C \delta u_N + \Delta t_{R_T}^C \delta u_T. \tag{2.46}$$

Considerando-se a igualdade

$$t_R^C d\Gamma_R = t^C d\Gamma \tag{2.47}$$

onde  $t^C$  é o vetor tração na região  $\Gamma_C$  e  $t_R^C$  o vetor tração na região  $\Gamma_{C_R}$  (configuração de referência) e usando a relação de Nanson (Spencer, 1980)

$$n d\Gamma = J F^{-1} n_R d\Gamma_R, \tag{2.48}$$

onde  $F^{-1}$  é o inverso da matriz representativa do tensor gradiente de deformação  $F$  e  $J$  é o jacobiano da transformação (determinante do tensor gradiente de deformação), obtém-se

$$\left( t_{R_N}^C n_R + t_{R_T}^C \right) d\Gamma_R = \left[ t_N^C J F^{-1} n_R + T_{R_T}^C (t_T^C) \right] d\Gamma_R. \quad (2.49)$$

Observa-se que  $t_R^C$  foi decomposto em componentes normal e tangencial, onde  $n$  é a normal exterior à superfície de contato e  $T_{R_T}^C$  é a componente tangencial na configuração de referência, aparecendo se o atrito for considerado, sendo função da componente tangencial do vetor tração definido na configuração deformada. Diversas metodologias de solução de problemas de contato, incluindo o uso de leis de atrito, podem ser encontradas em Kikuchi & Oden (1984), Torigaki (1989), Simo & Laursen (1992) e Peric & Owen (1992), entre outros trabalhos.

Utilizando as relações (2.45) e (2.49) obtém-se

$$t_{R_N}^C \delta u_N = t_N^C J F_{ij}^{-1} n_{R_j} \delta u_i \quad (2.50)$$

$$t_{R_T}^C \cdot \delta u_T = T_{R_T}^C (t_T^C) \cdot \delta u_T \quad (2.51)$$

e, na forma incremental,

$$\Delta t_{R_N}^C \delta u_N = \left( \Delta t_N^C J F_{ij}^{-1} + t_N^C \Delta J F_{ij}^{-1} + t_N^C J \Delta F_{ij}^{-1} \right) n_{R_j} \delta u_i \quad (2.52)$$

$$\Delta t_{R_T}^C \cdot \delta u_T = \Delta T_{R_T}^C (t_T^C, \Delta t_T^C) \cdot \delta u_T. \quad (2.53)$$

Inserindo (2.45), (2.46), (2.51) e (2.53) na expressão do princípio dos trabalhos virtuais na sua forma incremental dada por (2.30), obtém-se

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_R} (\Delta S_{ij} \delta E_{ij} + S_{ij} \Delta u_{k,i} \delta u_{k,j}) d\Omega = \int_{\Omega_R} \Delta b_{R_i} \delta u_i d\Omega + \\
& + \int_{\Gamma_{FR}} \Delta t_{R_i}^F \delta u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{CR}} (\Delta t_N^C J F_{ij}^{-1} + t_N^C \Delta J F_{ij}^{-1} + t_N^C J \Delta F_{ij}^{-1}) n_{R_j} \delta u_i d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma_{CR}} \Delta T_{R_T}^C (t_T^C, \Delta t_T^C) \cdot \delta u_T d\Gamma + R,
\end{aligned} \tag{2.54}$$

onde

$$\begin{aligned}
R = & - \int_{\Omega_R} S_{ij} \delta E_{ij} d\Omega + \int_{\Omega_R} b_{R_i} \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_{FR}} t_{R_i}^F \delta u_i d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma_{CR}} t_N^C J F_{ij}^{-1} n_{R_j} \delta u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{CR}} T_{R_T}^C (t_T^C) \cdot \delta u_T d\Gamma.
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Fazendo uso de uma desigualdade a partir das condições de contato, dadas pelas equações 2.43 ou 2.44 (Selke, 1986),

$$(t_N^C + \Delta t_N^C) \delta u_N \geq 0$$

ou (2.56)

$$\Delta t_N^C \delta u_N \geq -t_N^C \delta u_N \quad \forall \delta u_N \in \mathcal{K},$$

onde  $\mathcal{K}$  é o conjunto restrito, dentro do qual se procura a solução (ver seção 2.3), obtém-se a seguinte desigualdade variacional

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_R} (\Delta S_{ij} \delta E_{ij} + S_{ij} \Delta u_{k,i} \delta u_{k,j}) d\Omega \geq \int_{\Omega_R} \Delta b_{R_i} \delta u_i d\Omega + \\
& + \int_{\Gamma_{FR}} \Delta t_{R_i}^F \delta u_i d\Gamma - \int_{\Gamma_{CR}} (t_N^C J F_{ij}^{-1} - t_N^C \Delta J F_{ij}^{-1} - t_N^C J \Delta F_{ij}^{-1}) n_{R_j} \delta u_i d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma_{CR}} \Delta T_{R_T}^C (t_T^C, \Delta t_T^C) \cdot \delta u_T d\Gamma + R.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Antes de particularizar a representação variacional deste problema para uma formulação lagrangiana atualizada e para placa de Mindlin-Reissner, metodologias de

resolução desta desigualdade variacional são discutidas, com especial atenção ao método da penalidade.

### **2.3 Métodos de Solução da Desigualdade Variacional**

Os métodos de resolução da desigualdade variacional, para posterior discretização via método dos elementos finitos, são usualmente divididos em duas categorias (Simo, Wriggers, Schweizerhof & Taylor, 1986): método dos multiplicadores de Lagrange e método da penalidade.

Na primeira categoria, a condição de desigualdade, oriunda da imposição das condições de contato, é satisfeita exatamente, por intermédio da introdução de variáveis adicionais no funcional. Tais variáveis são os multiplicadores de Lagrange, os quais apresentam um significado físico associado ao problema. Este método apresenta os inconvenientes de aumentar o número de incógnitas e de apresentar zeros na diagonal principal da matriz de rigidez associada com os multiplicadores de Lagrange, o que dificulta o processo de solução numérica.

No método da penalidade as restrições de contato são impostas, de forma aproximada, através da adição de um termo no funcional que está sendo extremizado, termo este que se torna maior quanto maior for a violação da restrição. O número de incógnitas fica inalterado.

Pode-se mencionar ainda, como uma generalização dos dois métodos citados acima, o método do lagrangiano perturbado (Simo, Wriggers & Taylor, 1985) e o método do lagrangiano aumentado (Simo & Laursen, 1992).

Esses métodos também são aplicados a problemas com restrições expressas por igualdades, tais como a incompressibilidade de sólidos, por exemplo, em materiais hiperelásticos tipo borracha (Jankovich, Leblank & Durand, 1981; Oden & Kikuchi, 1982; Sussman & Bathe, 1987; Fonseca, 1990) e em fluidos (Carey & Oden, 1983).

Neste trabalho é adotada a técnica da penalidade, pois obtém-se com esta formulação um sistema de equações com o mesmo número de incógnitas do problema antes da introdução das restrições, apesar desta metodologia ter outros inconvenientes, tal como a escolha adequada do fator de penalidade, o que será discutido no decorrer do texto.

A seguir, apresentam-se as bases matemáticas do método dos multiplicadores de Lagrange e do método da penalidade.

### 2.3.1 Extremização de Funcionais

Seja  $J(v)$  o funcional que se deseja extremizar, correspondente a um operador que mapeia o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  das funções admissíveis no conjunto dos números reais  $\mathcal{R}$ , isto é,

$$J : \mathcal{H}(\Omega) \rightarrow \mathcal{R}.$$

Assim, quando  $J$  atingir seu extremo, a seguinte condição deve ser satisfeita (Oden & Kikuchi, 1984)

$$\langle \delta J(u), v \rangle = 0 \quad \forall v \in \mathcal{H}, \quad (258)$$

onde  $\langle \delta J(u), v \rangle$  é a chamada primeira variação do funcional  $J$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto dual, pois  $\delta J(u) \in \mathcal{H}'$ , o qual é o espaço dual de  $\mathcal{H}$ .

A equação (2.58) é equivalente a

$$\delta J(u) = 0 \quad \text{em } \mathcal{H}'. \quad (2.59)$$

Suponha que agora deseja-se extremizar o mesmo funcional  $J$ , sujeito à seguinte restrição de igualdade

$$Bu = g \quad , \quad (2.60)$$

onde  $B$  é um operador que mapeia  $\mathcal{H}$  em outro espaço de Hilbert  $Q$ .

Assim, o problema agora é encontrar o extremizador de  $J$  no subconjunto  $\mathcal{K}$  de  $\mathcal{H}$ , definido por

$$\mathcal{K} = \{v \in \mathcal{H} \mid Bv = g\} \quad , \quad (2.61)$$

onde  $\mathcal{K}$  é chamado de conjunto restrito ou conjunto das funções admissíveis.

### 2.3.2 Método dos Multiplicadores de Lagrange

O método dos multiplicadores de Lagrange é uma maneira alternativa de se encontrar a solução do problema com restrição, procurando-se a mesma no espaço total  $\mathcal{H}$  e não somente no espaço restrito  $\mathcal{K}$ .

Para melhor entendimento do método dos multiplicadores de Lagrange, define-se o espaço dos multiplicadores de Lagrange  $Q'$  e o funcional  $\mathcal{L}$ , que é o lagrangiano de  $J$ .

O espaço dos multiplicadores de Lagrange  $Q'$ , dual do espaço  $Q$ , é definido como o mapeamento de  $\mathcal{H}$  pelo operador  $B$ , ou seja, contém os elementos  $Bu$ .

O funcional  $\mathcal{L}$ , que mapeia  $\mathcal{H} \times Q'$  em  $\mathcal{R}$ , é definido por (Carey & Oden, 1983)

$$\mathcal{L}(v, q) = J(v) + [q, Bv - g] \quad , \quad (2.62)$$



onde  $v$  e  $q$  são funções peso pertencentes aos espaços  $\mathcal{H}$  e  $Q'$ , respectivamente,  $[\cdot, \cdot]$  é o produto dual  $Q' \times Q$ , e a adição do termo  $[q, Bv - g]$  tem efeito nulo pois, se a solução encontrada para  $v$  estiver no conjunto  $\mathcal{K}$ , então  $[q, Bv - g] = 0$ . Carey & Oden (1983) apresentam algumas propriedades dos espaços envolvidos.

Aplicando a primeira variação do lagrangiano de  $J(\mathcal{L})$  obtém-se

$$\langle \delta L(u, p), (v, q) \rangle_{\mathcal{H} \times Q'} = \langle \delta J(u), v \rangle + [p, Bv] + [q, Bu - g]. \quad (2.63)$$

O ponto estacionário de  $\mathcal{L}$  é dado quando sua primeira variação se anula. Assim, o seguinte problema variacional de valor no contorno é obtido

$$\begin{aligned} \langle \delta J(u), v \rangle + [p, Bv] &= 0 \quad \forall v \in \mathcal{H} \\ [q, Bu - g] &= 0 \quad \forall q \in Q'. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Com isso, além de  $u$ , tem-se também como variável  $p$ , que é o multiplicador de Lagrange, e que apresenta um significado físico associado ao problema que se está resolvendo. Assim, utilizando o método dos elementos finitos a partir de (2.64) aproxima-se, além de  $u$ , também os multiplicadores de Lagrange  $p$ , independentemente. Os elementos finitos obtidos através da formulação dos multiplicadores de Lagrange são chamados elementos finitos mistos, não sendo aplicados somente em problemas com restrições, mas também na análise estática linear para, por exemplo, melhorar valores de tensão, que são pobres na formulação via deslocamentos. Mais detalhes sobre formulações mistas de elementos finitos podem ser encontradas em Pian & Tong (1987) e Washizu (1982).

### 2.3.3 Método da Penalidade

Para se fazer a extremização de problemas com restrições, no método da penalidade, adiciona-se ao funcional que está sendo extremizado um termo de penalização, que se torna maior, quanto mais distante a solução encontrada estiver da restrição  $Bu = g$ .

Primeiramente, define-se um *funcional penalidade*  $P$  como sendo um mapeamento de  $\mathcal{H}$  em  $\mathcal{R}$ , que deve satisfazer as seguintes condições (Carey & Oden, 1983):

- 1 )  $P$  é diferenciável, isto é, sua primeira variação existe, ou seja
 
$$\langle \delta P(u), v \rangle_{\mathcal{H}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial P(u + \varepsilon P)}{\partial \varepsilon} \quad \exists,$$
- 2 )  $P(v) \geq 0$  para todo  $v \in \mathcal{H}$ ; (2.65)
- 3 )  $P(v) = 0$  se  $v \in \mathcal{K}$  e  $P(v) > 0$  se  $v \notin \mathcal{K}$ ;
- 4 )  $P$  é convexo, isto é,  $P[\theta u + (1 - \theta)v] \leq \theta P(u) + (1 - \theta)P(v)$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ .

Assim, após obter-se um funcional  $P$  que satisfaz as condições (2.65) define-se um novo funcional  $J_\varepsilon$  :

$$J_\varepsilon(v) = J(v) + \frac{1}{\varepsilon} P(v), \quad v \in \mathcal{H} \quad (2.66)$$

sendo  $\varepsilon$  um número positivo, arbitrário.

Se  $J$  for diferenciável, estritamente convexo e coercivo (Oden e Carey, 1983),  $J_\varepsilon$  tem um único extremizador  $u_\varepsilon \in \mathcal{K}$  para cada valor de  $\varepsilon > 0$ , que é solução do problema variacional

$$\langle \delta J(u_\varepsilon), v \rangle_{\mathcal{H}} + \frac{1}{\varepsilon} \langle \delta P(u_\varepsilon), v \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \quad \forall v \in \mathcal{H} \quad (2.67)$$

sendo que  $u_\varepsilon$ , em geral, não satisfaz a condição de restrição. Fazendo  $\varepsilon$  tender a zero obtém-se a seqüência  $\{u_\varepsilon\}$  que, devido à coercividade de  $J$ , converge fracamente para  $u \in \mathcal{H}$ , e o limite desta seqüência é o extremizador de  $J$ , no conjunto  $\mathcal{K}$ .

Escolhendo o seguinte funcional penalidade

$$P(v) = \frac{I}{2} \|Bv - g\|_Q^2 \quad (2.68)$$

e aplicando o método da penalidade (2.67), obtém-se

$$\langle \delta J(u_\varepsilon), v \rangle_{\mathcal{H}} + \frac{1}{\varepsilon} [Bu_\varepsilon - g, Bv]_{\mathcal{H}} = 0 \quad \forall v \in \mathcal{H}. \quad (2.69)$$

Para uma formulação de elementos finitos utilizando (2.69) apenas a variável  $u$  será aproximada, mas devido ao fato do processo ser numérico, a escolha do fator de penalidade  $\varepsilon$  deve ser feita de forma bastante cuidadosa, pois como mencionado anteriormente, (2.69) convergirá para a solução quando  $\varepsilon$  tender à zero e, numericamente isto é inviável.

A partir da formulação do problema através do método da penalidade, pode-se encontrar os valores dos multiplicadores de Lagrange, que representam variáveis dependentes importantes associadas ao problema, estabelecendo assim uma relação entre os dois métodos.

Seja o lagrangiano perturbado, definido por (Carey & Oden, 1983)

$$\mathcal{L}_\varepsilon(v, q) = \mathcal{L}(v, q) - \frac{\varepsilon}{2} \|q\|_Q^2 \quad (2.70)$$

onde  $\varepsilon$  é uma constante arbitrária maior que zero, e  $\mathcal{L}(v, q)$  é definido em (2.62).

Fazendo a primeira variação de  $\mathcal{L}_\varepsilon$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \langle \delta \mathcal{L}_\varepsilon(u_\varepsilon, p_\varepsilon), (v, q) \rangle_{\mathcal{H} \times Q} = & \langle \delta J(u_\varepsilon), v \rangle_{\mathcal{H}} + [p_\varepsilon, Bv] + \\ & + [q, Bu_\varepsilon - g] + \varepsilon [q, p_\varepsilon], \end{aligned} \quad (2.71)$$

e o seguinte problema variacional

$$\langle \delta J(u_\varepsilon), v \rangle_{\mathcal{H}} + [p_\varepsilon, Bv] = 0 \quad \forall v \in \mathcal{H}, \quad (2.72a)$$

$$[q, Bu_\varepsilon] - \varepsilon [q, p_\varepsilon] = [q, g] \quad \forall q \in Q. \quad (2.72b)$$

De (2.72b), obtém-se

$$p_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (Bu_\varepsilon - g), \quad (2.73)$$

que é o multiplicador de Lagrange do problema.

Inserindo (2.73) em (2.72a) obtém-se (2.69), que é o mesmo problema, formulado via método da penalidade.

As condições de existência e unicidade de  $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$  para a solução  $(u, p)$  quando  $\varepsilon$  tende a zero, são dadas através da condição de Babuska-Brezzi (Oden & Kikuchi, 1982).

No caso de contato, ao invés de uma restrição de igualdade, tem-se uma desigualdade que pode ser expressa por (2.36), ou seja, o conjunto restrito  $\mathcal{K}$  é definido como

$$\mathcal{K} = \{v \in \mathcal{H} \mid v_N - g_N \leq 0 \text{ em } \Gamma_C\}. \quad (2.74)$$

Desprezando o termo de atrito, pode-se resolver a desigualdade (2.57) de forma similar, utilizando o método da penalidade, onde o multiplicador de Lagrange é a pressão de contato

$$t_N = -\frac{1}{\varepsilon}(u_N - g_N) \quad (2.75)$$

ou, em termos incrementais, compatível com a formulação expressa por (2.57),

$$\Delta t_N = -\frac{1}{\varepsilon}(\Delta u_N - \Delta g_N), \quad (2.76)$$

sendo  $\varepsilon$  o fator de penalidade (quantidade positiva) e  $(\Delta u_N - \Delta g_N)$  é a restrição de contato na forma incremental.

O termo de penalidade pode ser interpretado como o efeito de uma mola atuando apenas quando a restrição é violada, onde o coeficiente de mola é dado por  $\frac{1}{\varepsilon}$ .

Caso o termo de atrito fosse considerado, o funcional resultante não satisfaria as condições para a aplicação do método da penalidade somente, e uma maneira de se contornar este problema seria a aplicação, além do método da penalidade, o método da regularidade (Kikuchi & Oden, 1984; Torigaki, 1989).

Assim, o princípio dos trabalhos virtuais, na sua forma incremental, aplicando-se o método da penalidade, é escrito como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_R} (\Delta S_{ij} \delta E_{ij} + S_{ij} \Delta u_{k,i} \delta u_{k,j}) d\Omega &= \int_{\Omega_R} \Delta b_{Ri} \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_{FR}} \Delta t_{Ri}^F \delta u_i d\Gamma - \\ &-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{CR}} J F_{ij}^{-1} n_{Rj} (\Delta u_N - \Delta g_N) \delta u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{CR}} J \Delta F_{ij}^{-1} n_{Rj} t_N^C \delta u_i d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma_{CR}} \Delta J F_{ij}^{-1} n_{Rj} t_N^C \delta u_i d\Gamma + R. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Utilizando a relação

$$\Delta u_N \doteq n_i \Delta u_i, \quad (2.78)$$

pois, quando o contato ocorre  $N_i = n_i$ , obtém-se

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_R} (\Delta S_{ij} \delta E_{ij} + S_{ij} \Delta u_{k,i} \delta u_{k,j}) d\Omega + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{CR}} J F_{ij}^{-1} n_{Rj} n_k \Delta u_k \delta u_i d\Gamma - \\
 & - \int_{\Gamma_{CR}} J \Delta F_{ij}^{-1} n_{Rj} t_N^C \delta u_i d\Gamma - \int_{\Gamma_{CR}} \Delta J F_{ij}^{-1} n_{Rj} t_N^C \delta u_i d\Gamma = \\
 & = \int_{\Omega_R} \Delta b_{Ri} \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_{FR}} \Delta t_{Ri}^F \delta u_i d\Gamma + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{CR}} J F_{ij}^{-1} n_{Rj} \Delta g_N \delta u_i d\Gamma + R.
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

## 2.4 Formulação Lagrangiana Atualizada

Tomando-se como referência o estado corrente e considerando-se os incrementos entre duas configurações vizinhas pequenos, pode-se particularizar (2.79) para uma formulação lagrangiana atualizada. Neste caso, as seguintes aproximações são feitas (Selke, 1986):

$$\begin{aligned}
 J & \doteq 1 \\
 S_{ij} & \doteq \sigma_{ij} \\
 F_{ij}^{-1} & \doteq \delta_{ij} \\
 \delta E_{ij} & \doteq \delta^* \varepsilon_{ij} \\
 \Delta S_{ij} & \doteq \Delta^* S_{ij} ,
 \end{aligned} \tag{2.80}$$

onde  $\delta^* \varepsilon_{ij}$  é a forma infinitesimal das componentes do tensor deformação virtual de Green,  $\sigma_{ij}$  são as componentes do tensor tensão de Cauchy, e o princípio dos trabalhos virtuais pode ser escrito na sua forma incremental, utilizando uma formulação lagrangiana atualizada (Washizu, 1982)

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\Delta^* S_{ij} \delta^* \varepsilon_{ij} + \sigma_{ij} \Delta u_{k,i} \delta u_{k,j}) d\Omega + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_C} n_i n_k \Delta u_k \delta u_i d\Gamma \\
& = \int_{\Omega} \Delta b_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_F} \Delta t_i^F \delta u_i d\Gamma + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_C} n_i \Delta g_N \delta u_i d\Gamma + R
\end{aligned} \tag{2.81}$$

onde

$$R = - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta^* \varepsilon_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} b_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_F} t_i^F \delta u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_C} t_N^C n_i \delta u_i d\Gamma, \tag{2.82}$$

sendo que as derivadas são em relação às coordenadas da configuração  $\Omega_n$ , isto é, em relação a  $X_i$ .

No Capítulo seguinte, o princípio dos trabalhos virtuais na sua forma lagrangiana atualizada (2.81), onde as condições de contato já estão incluídas, será particularizado para placa de Mindlin-Reissner.

## **CAPÍTULO 3**

# **FORMULAÇÃO DE ELEMENTO FINITO DE PLACA DE MINDLIN-REISSNER, SUJEITO A CONDIÇÕES DE CONTATO UNILATERAL**

---

No capítulo anterior foi apresentada uma formulação lagrangiana incremental para problemas da mecânica do contínuo, sujeitos à restrições de contato sem atrito. Neste capítulo são discutidas relações cinemáticas para o campo de deslocamentos em placas e é feita a particularização do princípio dos trabalhos virtuais, com condições de contato linearizadas incluídas, na sua forma lagrangiana atualizada. Será utilizada uma teoria de placa de primeira ordem, que leva em consideração o efeito da deformação cisalhante transversal, qual seja, a teoria de Mindlin-Reissner. A seguir, a relação obtida é discretizada, via método dos elementos finitos, utilizando para isso o elemento isoparamétrico lagrangiano de nove nós, de interpolação quadrática. As equações de elementos finitos para o problema em questão são obtidas e alguns aspectos numéricos, como integração seletiva e escolha do fator de penalidade, são discutidos.



### 3.1 Relações Cinemáticas para Placas

Considerando um sistema de referência cartesiano, uma estrutura do tipo placa é caracterizada por apresentar uma dimensão muito menor que as outras duas e, a partir disto, são feitas algumas hipóteses simplificativas com relação à cinemática de sua deformação, podendo-se descrever todo o comportamento da estrutura em função da sua superfície de referência (Figura 3.1). Um tratamento numérico tridimensional completo desse tipo de estrutura é mais caro, bem como pode apresentar problemas de condicionamento das matrizes. Assim, o domínio  $\Omega$  de análise para uma placa toma a seguinte forma

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 \mid z \in [-h/2, h/2], (x, y) \in \Gamma \subset \mathcal{R}^2\},$$

onde  $h$  é a espessura,  $\Gamma$  é a superfície de referência da placa e  $x$ ,  $y$  e  $z$  são os eixos do sistema de referência cartesiano sobre o qual está definida a geometria da placa (ver Figura 3.1). Com isso, a validade do modelo matemático obtido para representar a deformação do corpo tem sua aplicabilidade restringida.

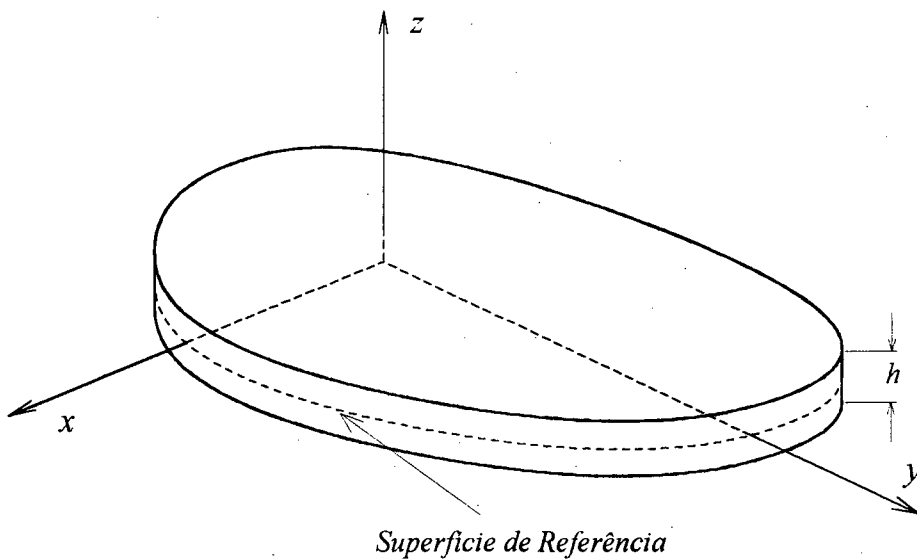


Figura 3.1: Elemento estrutural do tipo placa.

Existem várias teorias de placas, cada uma delas apresentando vantagens e desvantagens, dependendo da classe de problemas que se deseja resolver. Entre elas pode-se destacar a teoria clássica ou teoria de Kirchhoff (Timoshenko & Woinowsky-Krieger, 1959), a teoria de primeira ordem ou teoria de Mindlin- Reissner (Mindlin, 1951; Reissner, 1945) e teorias de ordem superior tais como a teoria de Reddy (1984) e a teoria de Lo, Christensen e Wu (1977).

### 3.1.1 Teoria Clássica de Placas Finas

Esta teoria é construída sobre as seguintes hipóteses:

- 1) a placa é fina, isto é, a relação espessura/lado é muito menor que 1/10;
- 2) os deslocamentos são pequenos, se comparados com sua espessura;
- 3) a tensão normal transversal é desprezável;
- 4) as normais à superfície de referência indeformada permanecem normais à superfície de referência deformada, e não variam de comprimento.

A hipótese 4) é conhecida como hipótese de Kirchhoff e, freqüentemente, esta teoria é chamada de teoria de Kirchhoff. O campo de aplicação são as chamadas placas finas, sendo que as componentes do deslocamento, em um ponto qualquer da placa, são aproximadas por

$$\begin{aligned}
 u_x(x, y, z) &\doteq u(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x}(x, y) \\
 u_y(x, y, z) &\doteq v(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y}(x, y) \\
 u_z(x, y, z) &\doteq w(x, y) ,
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde  $u$  e  $v$  são os deslocamentos da superfície de referência no plano da placa, nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, e  $w$  é o deslocamento transversal, sendo que a superfície de referência da placa está no plano  $z=0$ , sendo  $z$  a coordenada transversal. Nota-se, pelas relações cinemáticas (3.1), que as rotações da normal em torno dos eixos  $x$  e  $y$  são dadas pelas derivadas de  $w$  em relação a  $y$  e  $x$ , respectivamente.

Nesta teoria, o efeito da deformação cisalhante transversal é desprezado.

### 3.1.2 Teoria de Primeira Ordem para Placas Semi-Espessas

Nesta teoria a hipótese 4, apresentada no item anterior para a teoria clássica de placas finas é relaxada, sendo que a normal à superfície de referência continua reta e inextensível, mas não necessariamente perpendicular à superfície deformada. Esta teoria é aplicável tanto na análise de placas finas quanto moderadamente espessas (semi-espessas).

A mesma é chamada teoria de primeira ordem pois os deslocamentos são representados por polinômios lineares na coordenada da espessura,  $z$ . Nas teorias de segunda e terceira ordem, portanto, os deslocamentos são representados por polinômios quadráticos e cúbicos na coordenada da espessura, respectivamente. Assim, o campo de deslocamentos na teoria de primeira ordem é escrito, de forma aproximada, como

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &\doteq u(x, y) + z \theta_x(x, y) \\ u_y(x, y, z) &\doteq v(x, y) + z \theta_y(x, y) \\ u_z(x, y, z) &\doteq w(x, y) , \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde  $\theta_x$  e  $\theta_y$  representam as rotações da normal em torno dos eixos  $y$  e  $x$ , respectivamente, diferindo da teoria clássica no sentido de que essas rotações não

são dadas pelas derivadas do deslocamento da superfície de referência na direção transversal  $\frac{\partial w}{\partial x}$  e  $\frac{\partial w}{\partial y}$ , respectivamente. Geralmente, esta teoria é denominada de teoria de placa de Mindlin ou Mindlin-Reissner.

A deformação e, por consequência, a tensão cisalhante transversal, obtidas através desta teoria, são constantes ao longo da espessura. Entretanto, sabe-se da elasticidade tridimensional que tais tensões variam, pelo menos quadraticamente. Para corrigir este efeito, Mindlin (1951) propôs um fator de correção da distribuição das tensões cisalhantes transversais de  $\pi^2/12$ , obtido através da comparação com uma solução exata da elasticidade. Segundo Reissner (1945), este fator vale  $5/6$ , sendo que ele surge naturalmente nas equações de equilíbrio em termos de tensões resultantes, quando se utiliza a teoria proposta por Reissner, a qual é baseada em campo de tensões, ao passo que Mindlin (1951) partiu do campo de deslocamentos. Tanto Mindlin como Reissner chegaram ao mesmo campo de deslocamentos, dado por (3.2), justificando portanto o nome da teoria como teoria de Mindlin-Reissner.

Esta teoria tornou-se popular na formulação de elementos finitos de placas devido ao fato de requerer funções de interpolação de continuidade  $C^0$ , ao passo que a teoria de Kirchhoff requer continuidade  $C^1$ .

### 3.1.3 Teorias de Ordem Superior para Placas

Como denotado pelo próprio nome, nestas teorias o campo de deslocamentos é representado por polinômios de ordem superior na coordenada da espessura. A origem do desenvolvimento destas teorias está, geralmente, na modelagem de placas laminadas, onde o campo de deformações é mais complexo do que em placas homogêneas.

Entre as teorias de ordem superior pode-se destacar a teoria de Lo, Christensen e Wu (1977) e a teoria de Reddy (1984).

### 3.1.3.1 Teoria de Lo, Christensen e Wu para Placas

O campo de deslocamentos nesta teoria toma a seguinte forma (Lo, Christensen & Wu, 1977)

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &\doteq u(x, y) + z \theta_x(x, y) + z^2 \xi_x(x, y) + z^3 \phi_x(x, y) \\ u_y(x, y, z) &\doteq v(x, y) + z \theta_y(x, y) + z^2 \xi_y(x, y) + z^3 \phi_y(x, y) \\ u_z(x, y, z) &\doteq w(x, y) + z \theta_z(x, y) + z^2 \xi_z(x, y), \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde  $\theta_z$  e  $\xi_z$  estão relacionados com a deformação normal ao longo da espessura,  $\xi_x$ ,  $\xi_y$ ,  $\phi_x$  e  $\phi_y$  com o empenamento da seção transversal enquanto  $\theta_x$  e  $\theta_y$  continuam a levar em conta os efeitos da deformação cisalhante transversal.

### 3.1.3.2 Teoria de Reddy para Placas

Nesta teoria o campo de deslocamentos é dado por (Reddy, 1984)

$$\begin{aligned} u_x &\doteq u(x, y) + z \theta_x(x, y) + z^3 \phi_x(x, y) \\ u_y &\doteq v(x, y) + z \theta_y(x, y) + z^3 \phi_y(x, y) \\ u_z &\doteq w(x, y), \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde

$$\begin{aligned} \phi_x &= -\frac{4}{3h^2} \left( \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \phi_y &= -\frac{4}{3h^2} \left( \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

sendo  $h$  a espessura da placa.

Esta teoria incorpora a condição de tensões cisalhantes transversais nulas nas superfícies sendo, portanto, inadequada para o modelamento de problemas de contato com atrito.

Como as teorias de ordem superior são baseadas em campos de deslocamentos de alta ordem, não há a necessidade da inclusão de fatores de correção das tensões cisalhantes transversais, visto que levam à distribuições mais complexas ao longo da espessura, se comparadas com a teoria de primeira ordem.

Utilizando a teoria de Lo, Christensen e Wu, ao se discretizar as equações via método dos elementos finitos, pode-se utilizar elementos de continuidade  $C^0$ , pois as relações cinemáticas não incorporam derivadas dos deslocamentos no plano de referência. O mesmo não acontece quando se utiliza a teoria de Reddy, que apresenta derivadas de  $w$ , necessitando elementos finitos de classe  $C^1$ . Adicionalmente, a teoria de Lo, Christensen e Wu tem o inconveniente de possuir um elevado número de graus de liberdade e necessitar do uso de equações de equilíbrio tridimensionais para obter valores mais precisos de tensões cisalhantes transversais e tensões normais transversais (Lo, Christensen & Wu, 1977).

No presente trabalho, foi adotada uma teoria de placas de primeira ordem, de Mindlin-Reissner, sendo o campo de deslocamentos dado pelas relações (3.2), particularizado para uma forma incremental.

### **3.2 Relação Constitutiva Incremental e Relações Deformações-Deslocamentos**

Para uma formulação lagrangiana atualizada, considera-se que os estados de equilíbrio intermediários são suficientemente próximos, podendo-se linearizar as relações constitutivas para um incremento de carga. Assim, a lei de Hooke

generalizada é válida dentro de um incremento (Washizu, 1982), ou seja, considerando-se um meio isotrópico pode-se escrever<sup>1</sup>

$$\Delta^* S_{ij} = \lambda \delta_{ij} \Delta^* \varepsilon_{kk} + 2G \Delta^* \varepsilon_{ij}, \quad (3.6)$$

onde  $\lambda$  e  $G$  são as conhecidas constantes de Lamé, da elasticidade linear (Boresi, 1974) e  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker.

Utilizando a hipótese segundo a qual a tensão normal transversal é nula ( $\Delta^* S_{zz} = 0$ ), obtém-se

$$\Delta^* \varepsilon_{zz} = \frac{-\lambda \Delta^* \varepsilon_{\alpha\alpha}}{\lambda + 2G} \quad (3.7)$$

e, substituindo em (3.6) chega-se a

$$\Delta^* S_{\alpha\beta} = \bar{\lambda} \delta_{\alpha\beta} \Delta^* \varepsilon_{\gamma\gamma} + 2G \Delta^* \varepsilon_{\alpha\beta} \quad (3.8a)$$

e

$$\Delta^* S_{\alpha z} = 2G \Delta^* \varepsilon_{\alpha z} \quad (3.8b)$$

onde

$$\bar{\lambda} = \frac{2\lambda G}{\lambda + 2G}, \quad (3.9)$$

sendo que  $\lambda$  e  $G$  podem ser expressos, em termos do módulo de elasticidade  $E$  e do coeficiente de Poisson  $\nu$ , como segue

---

<sup>1</sup> Novamente nesta equação e nas que se seguem a convenção de soma, ou convenção de Einstein é utilizada, sendo que o campo de variação dos índices latinos é de 1 a 3 (x, y e z) e dos índices gregos de 1 a 2 (x e y).

$$\bar{\lambda} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \quad (3.10a)$$

e

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.10b)$$

Particularizando o princípio dos trabalhos virtuais na sua forma lagrangiana atualizada para o caso de um problema como o acima mencionado, onde  $\Delta S_{zz} \approx 0$ , o que é o caso na placa de Mindlin-Reissner, isto é, substituindo as relações constitutivas (3.8) em (2.81) e separando a integral no domínio  $\Omega$  em uma integral na espessura, de  $-h/2$  a  $h/2$ , e outra na superfície de referência  $\Gamma$  da placa, tem-se

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \left[ \Delta^* S_{\alpha\beta} \delta^* \varepsilon_{\alpha\beta} + 2 \Delta^* S_{\alpha z} \delta^* \varepsilon_{\alpha z} \right] + \right. \\ & \left. + \left[ \sigma_{\alpha\beta} (\Delta u_{\gamma,\alpha} \delta u_{\gamma,\beta} + \Delta u_{z,\beta} \delta u_{z,\alpha}) + \sigma_{\alpha z} (\Delta u_{\gamma,z} \delta u_{\gamma,\alpha} + \Delta u_{\gamma,\alpha} \delta u_{\gamma,z}) \right] \right\} dz d\Gamma + \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_C} \left\{ n_\alpha n_\beta \Delta u_\beta \delta u_\alpha + n_\alpha n_z (\Delta u_z \delta u_\alpha + \Delta u_\alpha \delta u_z) + n_z^2 \Delta u_z \delta u_z \right\} d\Gamma = \\ & = \int_{\Gamma} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ (\Delta b_\alpha \delta u_\alpha + \Delta b_z \delta u_z) \right\} dz d\Gamma + \int_{\Gamma_F} \left\{ (\Delta t_\alpha \delta u_\alpha + \Delta t_z \delta u_z) \right\} d\Gamma + \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_C} \Delta g_N \left\{ (n_\alpha \delta u_\alpha + n_z \delta u_z) \right\} d\Gamma + R, \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde

$$\begin{aligned} R = & - \int_{\Gamma} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \sigma_{\alpha\beta} \delta^* \varepsilon_{\alpha\beta} + 2 \sigma_{\alpha z} \delta^* \varepsilon_{\alpha z} \right\} dz d\Gamma + \int_{\Gamma} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ b_\alpha \delta u_\alpha + b_z \delta u_z \right\} dz d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma_F} \left\{ t_\alpha^F \delta u_\alpha + t_z^F \delta u_z \right\} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \left\{ t_N^C (n_\alpha \delta u_\alpha + n_z \delta u_z) \right\} d\Gamma, \end{aligned} \quad (3.12)$$



sendo  $n_\alpha$  e  $n_z$  as componentes da normal externa à superfície de contato  $\Gamma_C$ .

Introduz-se agora, na forma incremental do princípio dos trabalhos virtuais, as relações deformações-deslocamentos incremental e virtual, dadas por

$$\Delta^* \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i})$$

e (3.13)

$$\delta^* \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i})$$

ou, particularizadas para placa de Mindlin-Reissner,

$$\Delta^* \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\Delta u_{\alpha,\beta} + \Delta u_{\beta,\alpha}),$$

$$\Delta^* \varepsilon_{\alpha z} = \frac{1}{2} (\Delta u_{\alpha,z} + \Delta u_{z,\alpha}), \quad (3.14a)$$

e

$$\delta^* \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta u_{\alpha,\beta} + \delta u_{\beta,\alpha}),$$

$$\delta^* \varepsilon_{\alpha z} = \frac{1}{2} (\delta u_{\alpha,z} + \delta u_{z,\alpha}), \quad (3.14b)$$

e as relações para o campo de deslocamentos de uma placa de Mindlin, na sua forma incremental, quais sejam

$$\Delta u_x(x, y, z) \doteq \Delta u + z \Delta \theta_x(x, y)$$

$$\Delta u_y(x, y, z) \doteq \Delta v + z \Delta \theta_y(x, y)$$

$$\Delta u_z(x, y, z) \doteq \Delta w(x, y).$$

(3.15)

A integração ao longo da espessura, na direção  $z$ , é feita analiticamente, podendo-se trabalhar com tensões e momentos resultantes incrementais, definidos da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \Delta N_{\alpha\beta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \Delta S_{\alpha\beta} dz \\
 \Delta M_{\alpha\beta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \Delta S_{\alpha\beta} z dz \\
 \Delta Q_{\alpha} &= k \int_{-h/2}^{h/2} \Delta S_{\alpha z} dz
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

onde  $\Delta N_{\alpha\beta}$  são as tensões incrementais resultantes de membrana,  $\Delta M_{\alpha\beta}$  são os momentos incrementais resultantes e  $\Delta Q_{\alpha}$  são as tensões incrementais resultantes cisalhantes transversais, sendo que  $k$  é o fator de correção da distribuição dessas tensões que vale, como já dito no item 3.1.2.,  $\pi^2/12$  segundo Mindlin (1951) e  $5/6$  segundo Reissner (1945). As Figura 3.2(a) e 3.2(b) mostram a representação das tensões e momentos resultantes incrementais definidos em (3.16).

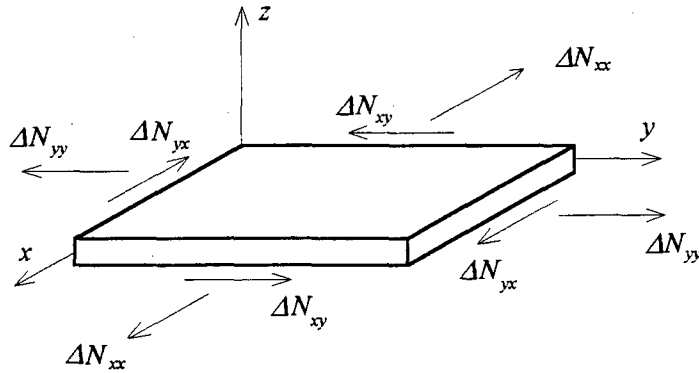


Figura 3.2(a): Esforços resultantes incrementais de membrana.

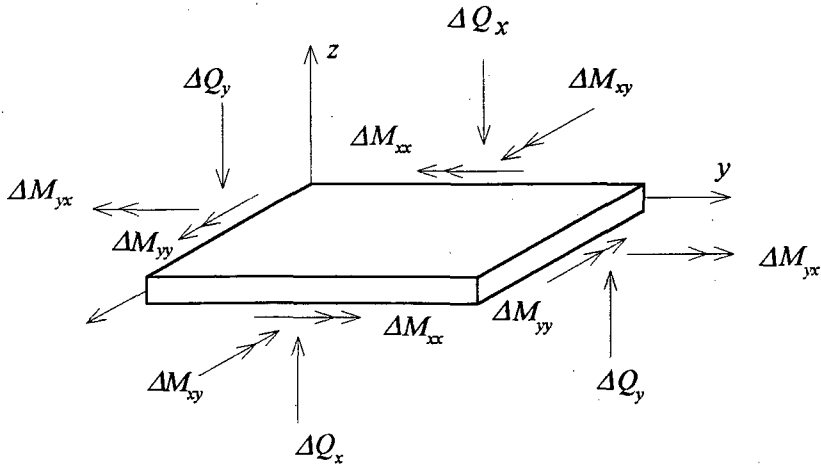


Figura 3.2(b): Esforços resultantes incrementais de flexão.

### 3.3 Discretização do Princípio dos Trabalhos Virtuais e Obtenção do Elemento Finito de Placa Semi-Espessa

Considera-se a placa dividida em  $E$  elementos finitos, dentro dos quais os deslocamentos incrementais e virtuais na superfície de referência são interpolados em termos dos deslocamentos incrementais e virtuais nodais, ou seja,

$$\begin{aligned}
 \Delta u(x, y) &= N_I(x, y) \Delta u_I \\
 \Delta v(x, y) &= N_I(x, y) \Delta v_I \\
 \Delta w(x, y) &= N_I(x, y) \Delta w_I \\
 \Delta \theta_x(x, y) &= N_I(x, y) \Delta \theta_{xI} \\
 \Delta \theta_y(x, y) &= N_I(x, y) \Delta \theta_{yI}
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

e

$$\begin{aligned}
 \delta u(x, y) &= N_I(x, y) \delta u_I \\
 \delta v(x, y) &= N_I(x, y) \delta v_I \\
 \delta w(x, y) &= N_I(x, y) \delta w_I \\
 \delta \theta_x(x, y) &= N_I(x, y) \delta \theta_{xI} \\
 \delta \theta_y(x, y) &= N_I(x, y) \delta \theta_{yI}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Neste caso,  $I$  varia de 1 a 9 e  $N_I(x, y)^2$  são as funções de interpolação do elemento finito isoparamétrico lagrangiano de nove nós (Pica, Wood & Hinton, 1980), dadas por

$$\begin{aligned}
 N_I &= \frac{1}{4}(1 + \xi \xi_I)(1 + \eta \eta_I)(\xi \xi_I + \eta \eta_I - 1) & I=1, 3, 5 \text{ e } 7 \\
 N_I &= \frac{1}{2}(1 + \xi^2)(1 + \eta \eta_I) & I=2 \text{ e } 6 \\
 N_I &= \frac{1}{2}(1 + \xi \xi_I)(1 - \eta^2) & I=4 \text{ e } 8 \\
 N_I &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta^2) & I=9
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

sendo  $\xi$  e  $\eta$  as coordenadas no sistema do elemento mestre (Figura 3.3) e  $\xi_I$  e  $\eta_I$  as coordenadas do nó  $I$  em relação ao sistema  $\xi \eta$ . Também a geometria do elemento é interpolada em termos das coordenadas nodais, utilizando as mesmas funções de interpolação, caracterizando assim um elemento isoparamétrico, isto é,

$$\begin{aligned}
 x &= N_I x_I \\
 y &= N_I y_I
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

sendo  $x_I$  e  $y_I$  as coordenadas nodais.

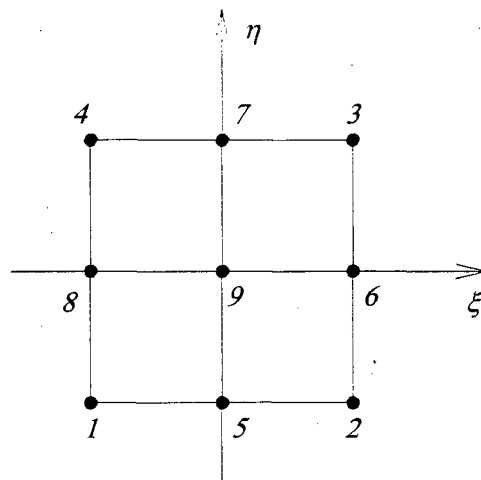


Figura 3.3: Elemento isoparamétrico de nove nós (sistema local  $(\xi, \eta)$ ).

<sup>2</sup>Não confundir as funções de interpolação  $N_I$  com as componentes do vetor normal unitário interior da superfície rígida  $N_i$ .

Assim, o princípio dos trabalhos virtuais é discretizado, podendo ser escrito da seguinte forma

$$\sum_{e=1}^E \left\{ \delta u_I \quad \delta v_I \quad \delta w_I \quad \delta \theta_{x_I} \quad \delta \theta_{y_I} \right\} \left( [K_O^e] + [K_\sigma^e] + [K_P^e] \right) \left\{ \begin{matrix} \Delta u_I \\ \Delta v_I \\ \Delta w_I \\ \Delta \theta_{x_I} \\ \Delta \theta_{y_I} \end{matrix} \right\} = \quad (3.21)$$

$$= \sum_{e=1}^E \left\{ \delta u_I \quad \delta v_I \quad \delta w_I \quad \delta \theta_{x_I} \quad \delta \theta_{y_I} \right\} \left( \{ \Delta F_E^e \} + \{ \Delta F_P^e \} + \{ R^e \} \right)$$

onde  $K_O^e$  é a matriz rigidez linear incremental do elemento,  $K_\sigma^e$  a matriz rigidez geométrica,  $K_P^e$  a matriz rigidez penalidade, onde é considerada a contribuição de contato,  $\Delta F_E^e$  é o vetor carregamento externo incremental,  $\Delta F_P^e$  é o vetor carregamento devido ao contato e  $R^e$  é o vetor resíduo.  $\sum_{e=1}^E$  representa a superposição das matrizes e vetores de todos os elementos que compõe a estrutura.

Como os deslocamentos virtuais são arbitrários, de (3.21) tem-se o seguinte sistema a ser resolvido, conhecido como equação de elementos finitos, na sua forma global:

$$\sum_{e=1}^E \left( [K_O^e] + [K_\sigma^e] + [K_P^e] \right) \left\{ \begin{matrix} \Delta u_I \\ \Delta v_I \\ \Delta w_I \\ \Delta \theta_{x_I} \\ \Delta \theta_{y_I} \end{matrix} \right\} = \sum_{e=1}^E \left( \{ \Delta F_E^e \} + \{ \Delta F_P^e \} + \{ R^e \} \right) \quad (3.22)$$

ou, de uma forma mais compacta

$$[K^G] \{ \Delta u^G \} = \left( \{ \Delta F^G \} + \{ R^G \} \right) \quad (3.23)$$

onde

$$[K^G] = \sum_{e=1}^E ([K_O^e] + [K_\sigma^e] + [K_P^e]) \quad (3.24)$$

é a matriz de rigidez global da estrutura,

$$\{\Delta u^G\} = \sum_{e=1}^E \begin{Bmatrix} \Delta u_I \\ \Delta v_I \\ \Delta w_I \\ \Delta \theta_{xI} \\ \Delta \theta_{yI} \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

o vetor incremento de deslocamento global,

$$\{\Delta F^G\} = \sum_{e=1}^E (\{\Delta F_E^e\} + \{\Delta F_P^e\}) \quad (3.26)$$

o vetor incremento de carga global e,

$$\{R^G\} = \sum_{e=1}^E \{R^e\} \quad (3.27)$$

o vetor resíduo global.

O sistema (3.23) deve ser solucionado para cada incremento de carga  $\Delta F^G$ .

Para tanto utiliza-se o algoritmo iterativo de Newton-Raphson

$$\{\Delta u^G\}^{i+1} = \{\Delta u^G\}^i + ([K^G]^i)^{-1} (\{\Delta F^G\} + \{R^G\}^i), \quad (3.28)$$

onde  $i$  representa a iteração dentro do incremento de carga, sendo que o processo iterativo é interrompido quando o vetor  $(\{\Delta F^G\} + \{R^G\}^i)$  alcançar uma certa tolerância,

passando-se para o próximo incremento de carga e um novo processo iterativo. Esta sequência é seguida até que toda a carga externa seja aplicada.

O método de Newton-Raphson, para um determinado passo de carga, pode ser visualizado graficamente na Figura 3.4. A quantidade  $(\{\Delta F^G\} + \{R^G\}^i)$ , na Figura 3.4, foi denominada de  $\{\delta\}^i$ , o índice  $G$ , que indica matrizes e vetores globais, foi suprimido, e o índice  $N$  indica que o processo convergiu em  $N$  iterações.

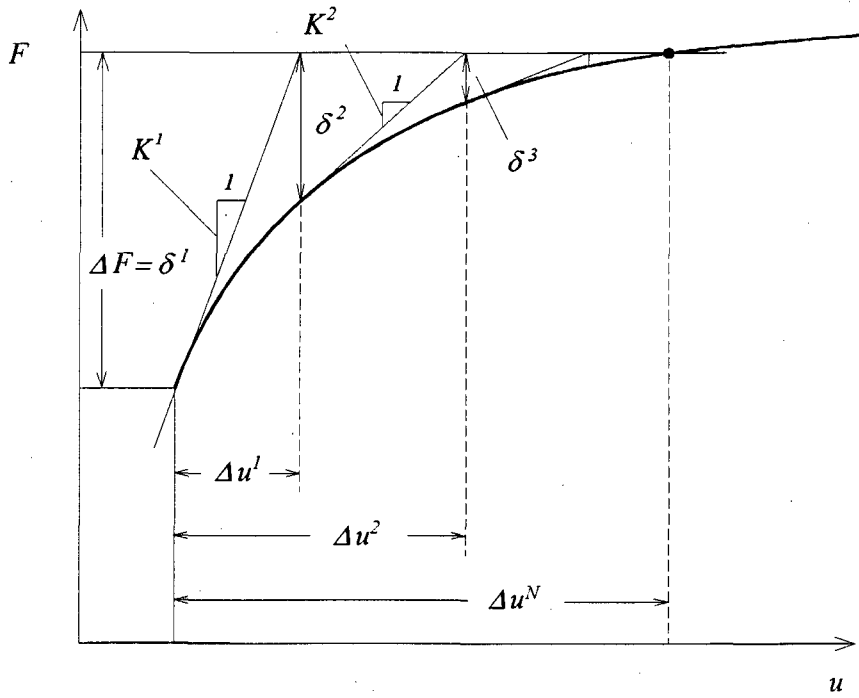


Figura 3.4: O método de Newton-Raphson.

O seguinte critério de tolerância foi utilizado

$$\frac{(\{\delta\}^T \{\delta\})^{1/2}}{(\{\Delta F\}^T \{\Delta F\})^{1/2}} \leq TOL, \quad (3.29)$$

onde  $TOL$  indica a tolerância máxima que se deseja para esta quantidade

### 3.4 Condições de Contato para Placa de Mindlin-Reissner

As condições de contato incremental geral foram apresentadas no Capítulo 2, sendo dadas pela expressão (2.39)

$$\Delta u_N - \Delta g_N \leq 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_c \quad (3.30)$$

onde

$$\Delta u_N = N_i \Delta u_i \quad (3.31)$$

e

$$\Delta g_n = \frac{\phi - \psi}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right)^2}} \quad (3.32)$$

Para o caso de placas, como a superfície de referência está no plano x-y, ou seja,  $z = 0$ , a equação da superfície que delimita o corpo elástico, que agora é uma placa de espessura  $h$ , é dada por

$$\phi(x, y) = u_z(x, y, z = +\frac{h}{2}) + \frac{h}{2} \quad (3.33)$$

se o obstáculo estiver acima, em relação ao eixo transversal  $z$ , da placa, e

$$\phi(x, y) = u_z(x, y, z = -\frac{h}{2}) - \frac{h}{2} \quad (3.34)$$

se estiver abaixo.



Assim, como se está utilizando o modelo de placa de Mindlin-Reissner, de (3.2) tem-se que  $u_z(x, y, z) = w(x, y)$  e, (3.33) e (3.34) podem ser escritos, numa mesma expressão, da seguinte forma

$$\phi(x, y) = w(x, y) \pm \frac{h}{2}. \quad (3.35)$$

Portanto,  $\Delta g_N$  particularizado para placa de Mindlin-Reissner pode ser escrito como

$$\Delta g_N = \frac{\psi(x, y) - w(x, y) \mp h/2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2}}, \quad (3.36)$$

onde  $w$  é o deslocamento transversal, sendo atualizado a cada incremento de carga, isto é,

$$w^{i+1} = w^i + \Delta w^{i+1} \quad (3.37)$$

sendo  $i$  o número do incremento de carga.

### 3.5 Integração Numérica e Escolha do Fator de Penalidade

Como é bem conhecido (Pica, Wood & Hinton, (1980); Hughes, (1987) e Cook, Malkus & Plesha, (1988)), a matriz de rigidez incremental linear pode ser separada em parcelas de membrana, flexão e cisalhamento transversal. Para sua obtenção, as integrais são avaliadas numericamente, utilizando o método da quadratura gaussiana.

Na integração das parcelas de membrana e flexão utiliza-se integração "cheia", isto é, como se está utilizando o elemento lagrangiano biquadrático, 3x3 pontos são utilizados (Cook, Malkus & Plesha, 1988). Já a parcela de cisalhamento transversal é

subintegrada, isto é, 2x2 pontos de Gauss são utilizados, para evitar o fenômeno do *locking*, que se caracteriza através da situação em que o modelo apresenta uma rigidez excessiva, não correspondendo ao que ocorre na realidade, especialmente quando a placa possui espessura muito reduzida. Este fenômeno já é bem conhecido e estudado na literatura (Hughes, 1987). O procedimento de integração seletiva, isto é, subintegração apenas de algumas parcelas que compõe a matriz de rigidez, foi proposto primeiramente por Zienkiewicz, Taylor & Too (1971) em um elemento de placa *serendipity* de 8 nós, utilizando uma integração gaussiana 2x2, que apresentou melhores resultados que a integração 3x3. Até mesmo para placas com espessura não tão reduzida, como as placas semi-espessas, este procedimento leva a resultados melhores. Em elementos finitos baseados em formulações de deslocamentos, a subintegração pode trazer o inconveniente de apresentar modos espúrios, que correspondem a modos de energia zero. O elemento de placa lagrangiano de nove nós, com integração seletiva apresenta um modo espúrio (Hughes & Cohen, 1978).

As tensões, necessárias para análise de resultados e para cálculo da matriz de rigidez geométrica, são avaliadas em pontos de Gauss uma ordem inferior àquela utilizada para integração cheia, tanto para as tensões de membrana e flexão como para as de cisalhamento transversal, apesar da parcela referente ao cisalhamento transversal ter sido subintegrada, isto é, todas as tensões são avaliadas em 2x2 pontos de Gauss. O uso deste procedimento é indicado por Cook, Malkus & Plesha (1988), para se obter valores mais precisos de tensões.

A parcela da matriz de rigidez proveniente do termo de penalidade é integrada utilizando 2x2 pontos de Gauss, satisfazendo assim a condição discreta de Babuska-Brezzi para validade do elemento. Nesse sentido, é importante lembrar o trabalho de Kikuchi & Oden (1980), que apresentaram um estudo matemático de elementos finitos válidos, isto é, que satisfazem a condição de Babuska-Brezzi, para elasticidade plana aplicada a materiais incompressíveis e a problemas de contato. Caso esta condição não seja satisfeita, o elemento pode apresentar *locking*. No trabalho de Malkus & Hughes (1978) foi apresentada uma relação entre a técnica da integração reduzida e

seletiva e os elementos finitos mistos (formulados com a utilização de multiplicadores de Lagrange). Assim, ao subintegrar o termo da matriz de rigidez referente ao termo de penalidade, fica-se em concordância com os elementos finitos mistos válidos para problemas com restrições, onde as funções de interpolação para os multiplicadores de Lagrange devem ser de ordem inferior às utilizadas para aproximar os deslocamentos (Kikuchi & Oden, 1980) e com o procedimento adotado por Ohtake, Oden & Kikuchi (1980), que subintegrou os termos de penalidade.

A condição de impenetrabilidade na forma incremental

$$\Delta u_N - \Delta g_N \leq 0 \quad (3.38)$$

é testada nos pontos de Gauss, seguindo o procedimento de Ohtake, Oden & Kikuchi (1980), apresentando assim melhores resultados, se comparados com o mesmo teste feito nos pontos nodais. Além disso, esta metodologia facilita o procedimento numérico, visto que, no caso de existir contato, necessita-se fazer a integração numérica e, para isto,  $\Delta g_N$  deverá ser avaliado em pontos de Gauss. Da mesma forma, os valores de pressão são avaliados em pontos de Gauss uma ordem inferior ao número de pontos utilizado para integração cheia, ou seja, 2x2 pontos, fazendo-se posteriormente uma suavização, segundo Hinton & Campbell (1974).

A escolha do fator de penalidade  $\varepsilon$  é uma etapa fundamental no método da penalidade, pois as propriedades de convergência são fortemente influenciadas por ele. Teoricamente, quanto menor o fator de penalidade, mais próximo da solução se está mas, devido à precisão dos computadores, um fator de penalidade muito pequeno pode levar a um mau condicionamento das matrizes, prejudicando a qualidade dos resultados. Assim, sua adequada escolha deve ser uma composição entre a violação da condição de contato e a perda de precisão devido ao mau condicionamento das matrizes, de modo a não prejudicar os resultados. Levando em consideração essas características, Torigaki (1989) apresenta um estudo de convergência, variando-se o valor do fator de penalidade, procedimento este feito para elementos planos e sólidos,

sendo que o valor do fator de penalidade é proporcional à flexibilidade do modelo. Para flexão de vigas, Selke (1986) recomenda valores do fator de penalidade entre  $\frac{10^{-5}}{E}$  e  $\frac{10^{-3}}{E}$ , onde  $E$  é o módulo de elasticidade da viga. Kikuchi & Oden (1984) resolvem dois problemas da mecânica do contínuo, utilizando elementos finitos de elasticidade plana, sendo o primeiro de contato clássico de Hertz de um cilindro com módulo de elasticidade de  $200 \text{ kgf} / \text{cm}^2$  contra uma superfície rígida plana e o segundo de indentamento de um cilindro rígido em uma fundação elástica de módulo de elasticidade igual a  $1000 \text{ kgf} / \text{cm}^2$ . Nesses dois problemas foi utilizado um fator de penalidade igual a  $10^{-4}$ , ou seja, para o primeiro problema o fator de penalidade vale  $\frac{2 \times 10^{-2}}{E}$  e para o segundo  $\frac{10^{-1}}{E}$ . Ohtake, Oden & Kikuchi (1980) utilizam fator de penalidade variável dentro do processo incremental, sendo função de valores da diagonal principal da matriz de rigidez de flexão, diminuindo a cada iteração, caso um determinado controle for violado.

No capítulo seguinte são resolvidos numericamente alguns problemas e é realizado um estudo da influência do fator de penalidade.

## **CAPÍTULO 4**

# **RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÃO**

---

Neste capítulo são apresentadas as resoluções numéricas de problemas de contato unilateral em placas semi-espessas, de forma a validar a formulação descrita nos capítulos anteriores. Entre os problemas resolvidos tem-se estruturas submetidas a grandes deslocamentos sem restrição, estruturas submetidas a pequenos e grandes deslocamentos, sujeitos a restrições unilaterais. Os resultados são comparados com soluções analíticas e numéricas disponíveis na literatura. Uma análise da influência do fator de penalidade também é realizada.

### **4.1 Problemas de Estruturas Submetidas a Grandes Deslocamentos**

Dois problemas de flexão de placas, submetidas a grandes deslocamentos, são resolvidos nesta seção. O primeiro consiste de uma placa quadrada engastada com carregamento transversal distribuído uniformemente, e o segundo, de uma placa circular engastada com carregamento concentrado central.

#### 4.1.1 Placa Quadrada Engastada

Uma placa quadrada engastada (Figura 4.1) com carregamento uniformemente distribuído é analisada. Devido à simetria do problema, apenas um quadrante da placa é modelado, utilizando-se malhas regulares de 1, 4 e 16 elementos (Figura 4.2).

Como o interesse é analisar um problema de flexão de placa submetida a grandes deslocamentos, a carga é distribuída em nove passos, sendo os resultados obtidos, neste caso, o deslocamento central transversal, mostrados na Tabela 4.1. Também nesta tabela são apresentados os resultados analíticos para flexão de placa fina, dados através de uma solução por séries. Considerando apenas o primeiro termo da série, o deslocamento transversal  $w$  pode ser obtido a partir da seguinte expressão (Chia, 1980), válida para coeficiente de Poisson de 0.316

$$w = 2.5223 w_{11} , \quad (4.1)$$

onde  $w_{11}$  é obtido de

$$\left( \frac{w_{11}}{h} \right)^3 + 0.2522 \frac{w_{11}}{h} = 0.0001333 \frac{pa^4}{Dh} \quad (4.2)$$

e

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (4.3)$$

é a rigidez à flexão da placa.

Também na Tabela 4.1, são apresentados resultados numéricos obtidos por Pica, Wood & Hinton (1980), onde também foi utilizada a teoria de Mindlin-Reissner, partindo de uma formulação lagrangiana total para grandes deslocamentos e discretizando um quadrante da placa com 16 elementos finitos lagrangianos de 9 nós.

Resultados em forma de gráfico, para a carga final, são mostrados na Figura 4.3, mostrando a convergência ao se discretizar a malha.

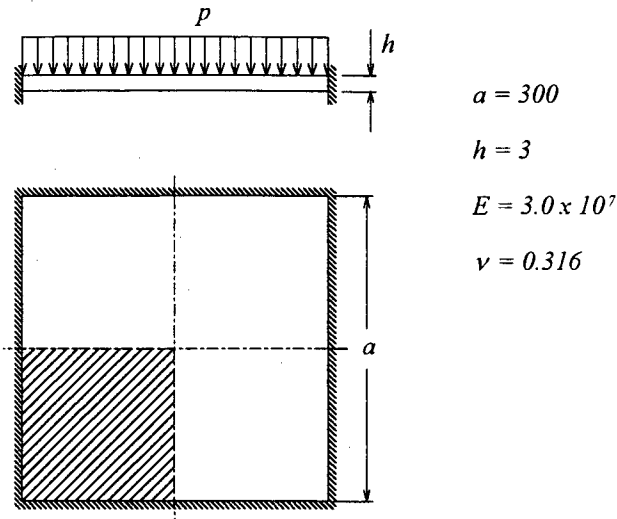


Figura 4.1: Placa quadrada engastada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído - a região hachurada representa o quadrante discretizado.

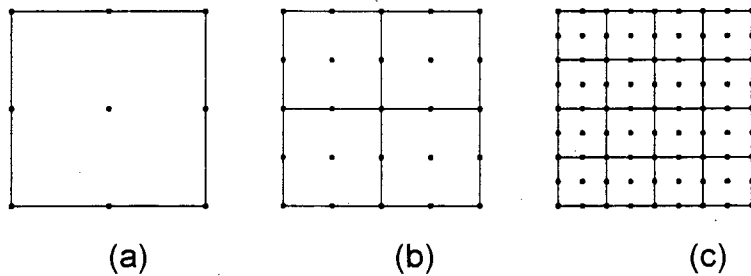


Figura 4.2: Discretização da placa (quadrante), com 1, 4 e 16 elementos finitos.

Tabela 4.1: Deslocamento central da placa.

	Número de elementos				
Carga p	1	4	16	Pica et al	Analítico (Chia)
5.337	0.8780	0.72067	0.7006	0.7104	0.7404
11.49	1.7887	1.4402	1.3678	1.4097	1.4455
19.02	2.7299	2.1482	2.0092	2.0745	2.0988
28.5	3.6938	2.8450	2.6333	2.7087	2.7163
40.47	4.6696	3.5295	3.2457	3.3189	3.3120
55.2	5.6354	4.1915	3.8410	3.9027	3.8858
73.5	6.6071	4.8451	4.4334	4.4784	4.4562
95.4	7.5601	5.4768	5.0112	5.0358	5.0132
120.6	8.4776	6.0759	5.5642	5.5665	5.5471

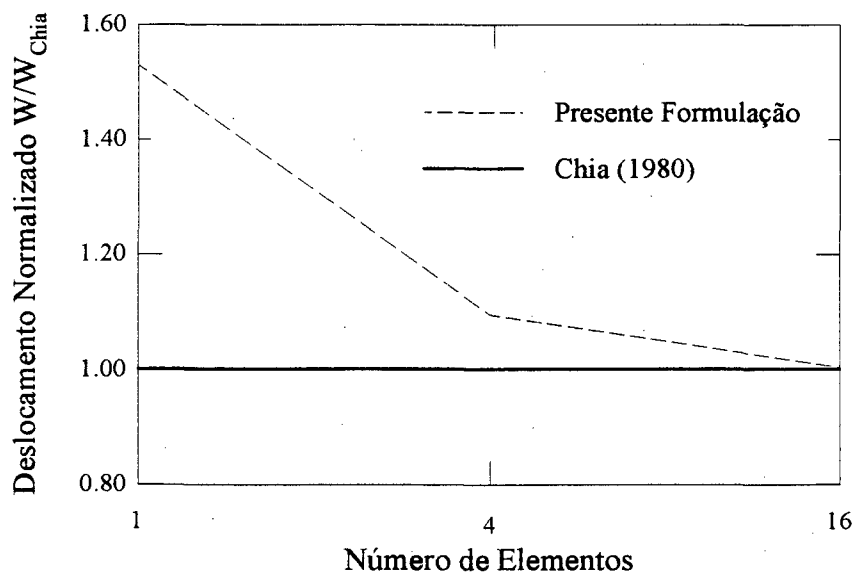


Figura 4.3: Convergência  $h$  - carga total.

Uma análise dos resultados apresentados na Tabela 4.1 permite verificar que as diferenças entre a presente formulação, utilizando a discretização em 16 elementos finitos, a solução analítica e a numérica apresentada por Pica, Wood & Hinton (1980)



são bastante pequenas. Observando o gráfico da Figura 4.3 pode-se notar uma rápida convergência de resultados ao se melhorar a discretização do modelo.

#### 4.1.2 Placa Circular Engastada

Uma placa circular engastada com carregamento concentrado central é analisada (Figura 4.4). Tomando-se vantagem da simetria do problema, modela-se apenas um quadrante, com 12 elementos finitos (Figura 4.5).

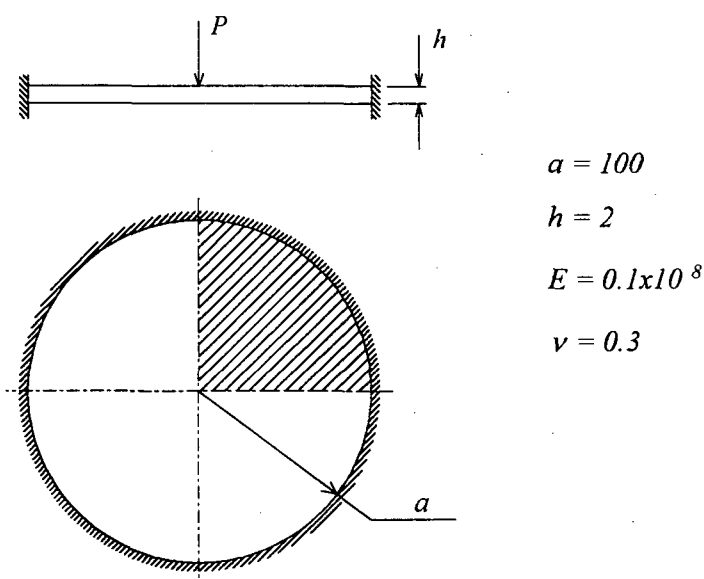


Figura 4.4: Placa circular engastada com carregamento concentrado central.

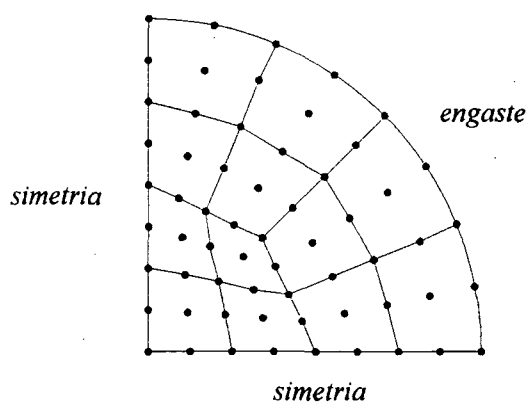


Figura 4.5: Placa circular - discretização de um quadrante.

A carga total é dividida em seis passos iguais, sendo os valores para o deslocamento central transversal  $w$  mostrados na Tabela 4.2, bem como resultados analíticos apresentados por Timoshenko & Woinowsky-Krieger (1959) para teoria de placa fina, utilizando uma solução em série onde, considerando o primeiro termo da série e para um coeficiente de Poisson igual a 0.3,  $w$  pode ser obtido a partir de

$$\frac{w}{h} + A \left( \frac{w}{h} \right)^3 = B \frac{Pa^2}{Eh^4} , \quad (4.4)$$

onde  $A = 0.443$  e  $B = 0.217$ .

Resultados numéricos obtidos por Pica, Wood & Hinton (1980), utilizando a mesma discretização e elementos finitos lagrangianos de 9 nós também são apresentados na Tabela 4.2. Para melhor analisar o desempenho do elemento finito na solução de problemas de flexão de placas com grandes deslocamentos, os resultados numéricos adimensionalizados são mostrados em forma de gráfico na Figura 4.6, juntamente com aqueles obtidos através da expressão (4.4), com os resultados de Pica, Wood & Hinton (1980) e com aqueles obtidos usando a teoria linear de placas finas. A solução linear de flexão de placas finas, fornecendo o deslocamento transversal do ponto no centro da placa, é dada por (Timoshenko & Woinowsky-Krieger, 1959)

$$w = \frac{Pa^2}{16 \pi D} . \quad (4.5)$$

Tabela 4.2: Deslocamento central da placa circular.

Carga P	SOLUÇÕES NUMÉRICAS		SOLUÇÃO ANALÍTICA
	w (Presente Trabalho)	w (Pica et al)	w (Timoshenko & W-Krieger)
16000	0.4204	0.4298	0.4255
32000	0.7981	0.8176	0.8093
48000	1.1276	1.1508	1.1386
64000	1.4141	1.4368	1.4193
80000	1.6660	1.6854	1.6618
96000	1.8912	1.9054	1.8745

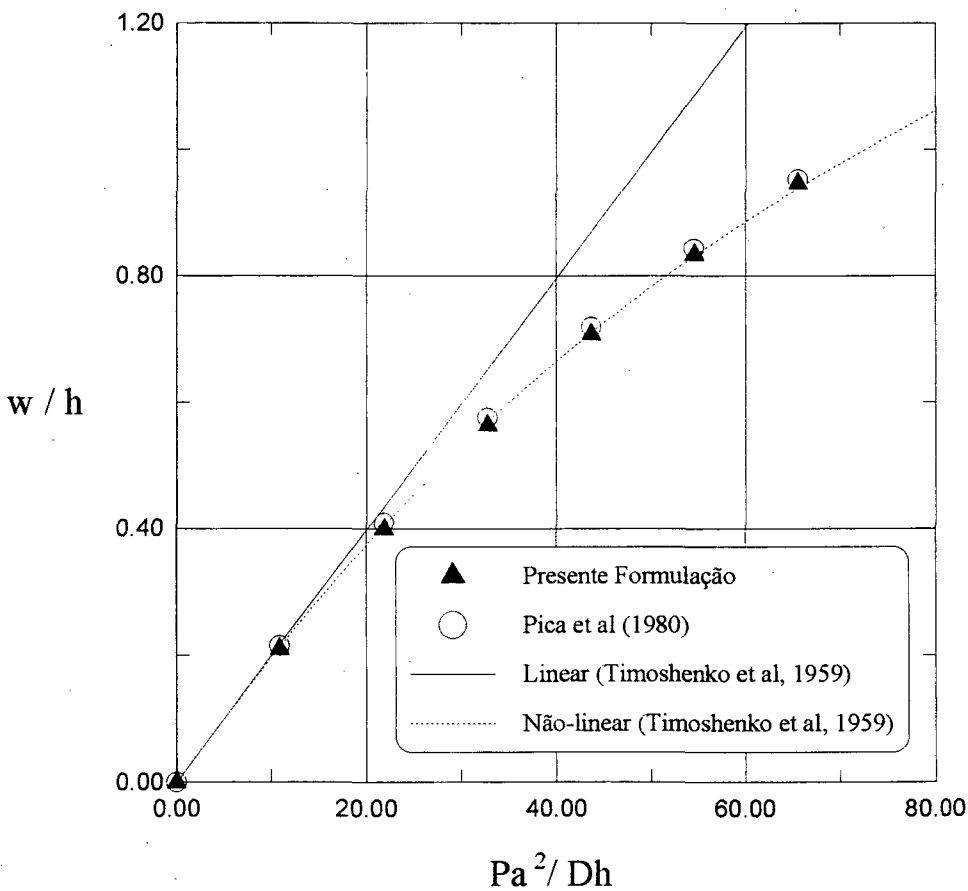


Figura 4.6: Deslocamento central da placa circular.

Analisando a Tabela 4.2 e o gráfico da Figura 4.6 verifica-se que os resultados obtidos com a presente formulação apresentam uma boa precisão. Ressalta-se a

importância deste desempenho numérico pois é imprescindível a consideração de grandes deslocamentos quando estes não forem muito menores que a espessura pois, a partir de  $w/h = 0.4$  (deslocamento maior que 40% do valor da espessura da placa), a teoria linear já não reproduz bem o comportamento real da estrutura.

## **4.2 Problemas de Estruturas Submetidas a Pequenos Deslocamentos e Sujeitas a Restrições Unilaterais**

Nesta seção são resolvidos problemas de flexão de vigas e placas submetidas a pequenos deslocamentos, sujeitas a restrições unilaterais. Primeiramente, analisou-se a flexão de uma placa circular engastada, com carregamento transversal uniformemente distribuído, sujeito a uma restrição de contato unilateral com uma superfície rígida. O segundo problema analisado é aquele em que tem-se a flexão de uma viga bi-apoiada, carregada com momentos concentrados nas extremidades e fletindo contra uma superfície rígida.

### **4.2.1 Placa Circular Engastada**

A placa circular engastada, representada na Figura 4.7, e sujeita a um carregamento uniformemente distribuído, é analisada.

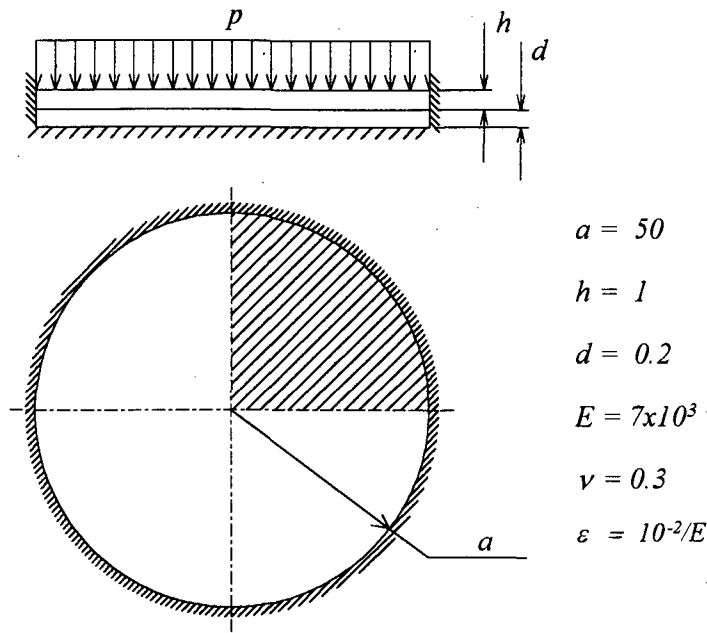


Figura 4.7: Placa circular engastada sujeita à restrição unilateral.

Um quadrante da placa é modelada, utilizando 16 elementos finitos lagrangianos de 9 nós (Figura 4.8). Os resultados dos deslocamentos transversais da estrutura, ao longo do raio, são apresentados na forma gráfica na Figura 4.9, para quatro passos de carga. Também é apresentada a solução analítica obtida por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) para teoria linear de placa fina, expressa por

$$w = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r + \frac{pr^4}{64D}, \quad (4.6)$$

onde, aplicando as seguintes condições de contorno sobre (4.6)

$$\begin{aligned}
 w(r=a) &= 0 \\
 \frac{dw}{dr}(r=a) &= 0 \\
 w(r=b) &= d \\
 \frac{dw}{dr}(r=b) &= 0 \\
 M_r(r=b) &= 0
 \end{aligned} \quad (4.6)$$

sendo  $b$  o raio da região em contato e  $M_r$  o momento resultante na direção radial, obtém-se cinco equações. Resolvendo-se o sistema encontra-se  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  e o raio  $b$ . Para a obtenção das soluções mostradas na Figura 4.9, este sistema foi resolvido numericamente.

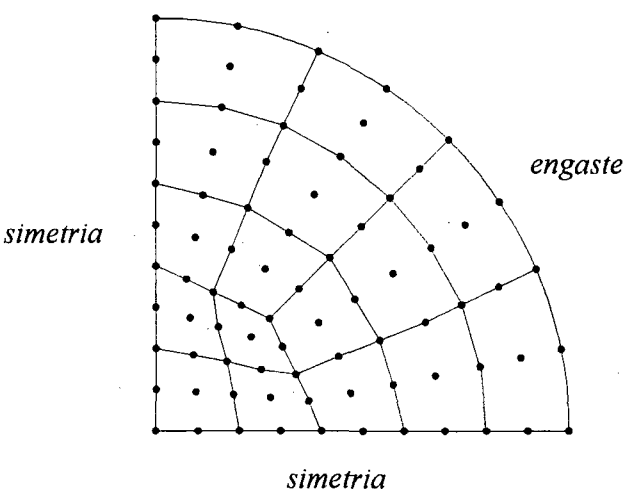


Figura 4.8: Quadrante discretizado da placa circular.

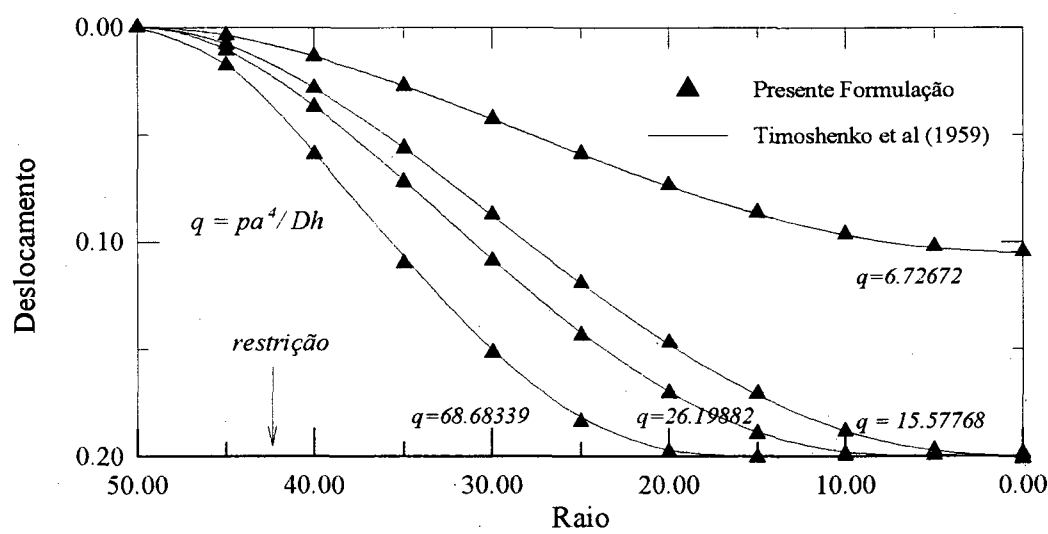


Figura 4.9: Deflexão da placa circular engastada.

Analisando a Figura 4.9, verifica-se que para carga normalizada  $q = 6.72672$  a placa ainda não está em contato com a superfície rígida, sendo a diferença entre os valores numéricos obtidos e os analíticos, dados por Timoshenko & Woinowsky-Krieger (1959), praticamente inexistente. O mesmo ocorre quando a região de contato é pequena ( $q = 15.57765$  e  $q = 26.19882$ ). Já para  $q = 68.68933$ , onde a região de contato é maior, pequenas diferenças são notadas. Há que se ressaltar aqui que, a solução apresentada por Timoshenko & Woinowsky-Krieger (1959), é válida para a teoria clássica de placas, que não leva em consideração a deformação cisalhante transversal.

A Figura apresenta, graficamente, a distribuição de pressões de contato  $p_c$  normalizadas ( $\frac{p_c a^2}{Dh}$ ) ao longo do raio da placa, podendo-se notar que em certos pontos, na vizinhança da fronteira da região de contato, onde já não há mais contato, ainda existe pressão, e até apresentando valores negativos, o que é fisicamente impossível. Isto provavelmente se deve ao fato de que, ao se utilizar a presente teoria de placas, onde apenas a deformação cisalhante transversal foi considerada, os valores de pressão na fronteira da região de contato são afetados por descontinuidades da tensão resultante de cisalhamento (Essenburg, 1975), podendo levar a inconsistências como a agora apresentada pois, pela teoria de contato de Hertz, estes valores de pressão deveriam ser nulos. Assim, numericamente, e por força das limitações da teoria usada, os valores de pressão estão sujeitos à certas perturbações nessa região. Outro fato que provavelmente contribuiu para a obtenção de valores negativos de pressão foi a suavização de pressões pois, como na periferia da região de contato tem-se altos valores de pressão e uma descontinuidade, pode-se obter valores negativos próximo à estas descontinuidades.

Infelizmente não se encontrou na literatura disponível valores de pressão na região de contato para o presente problema, a fim de se fazer comparações.

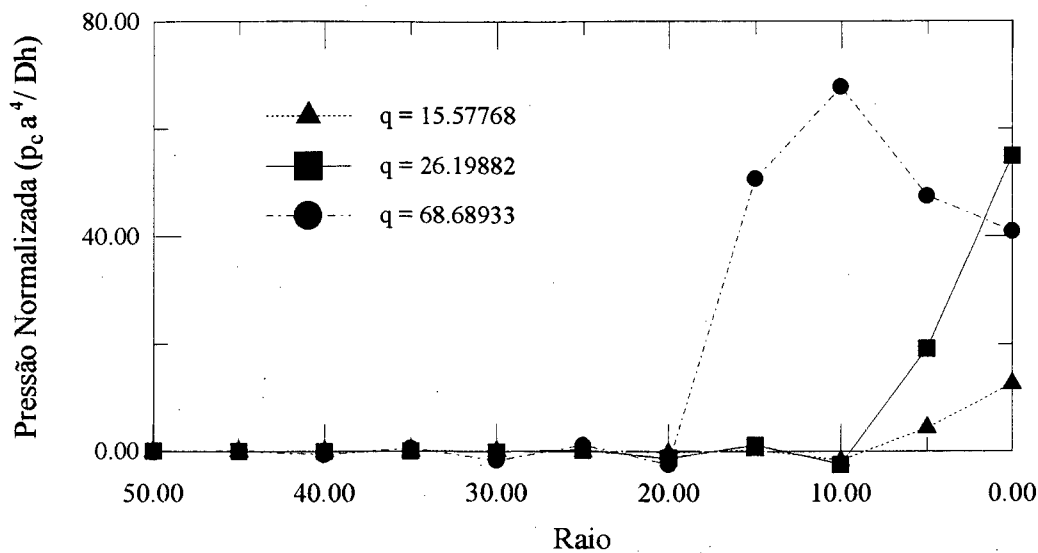


Figura 4.10: Distribuição de pressões (normalizadas) na placa circular engastada.

#### 4.2.2 Flexão de uma Viga contra uma Superfície Rígida

Seja a viga simplesmente apoiada mostrada na Figura 4.11, submetida à momentos concentrados nas extremidades, cujo deslocamento transversal é restringido unilateralmente por uma superfície rígida posicionada à uma distância  $d = 0.08$  cm. A viga apresenta as seguintes características: módulo de elasticidade  $E = 2.1 \times 10^4 \text{ KN/cm}^2$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0.29$ , comprimento  $2L = 2 \text{ cm}$ , altura  $h = 0.2 \text{ cm}$  e espessura  $b = 0.2 \text{ cm}$

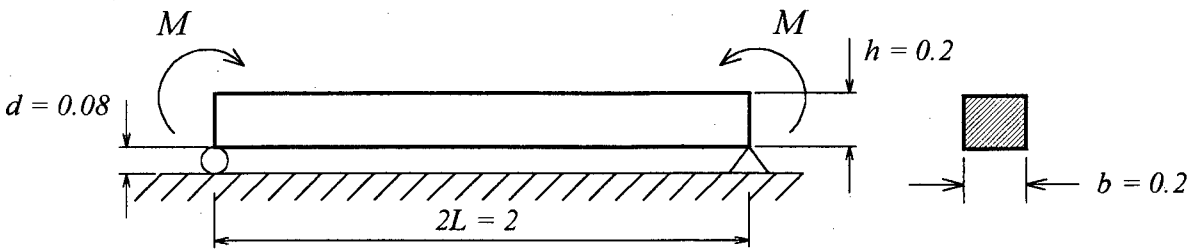


Figura 4.11: Viga bi-apoiada sob flexão.

O modelo de elementos finitos usado apresenta 13 elementos finitos (1 elemento na largura), utilizando-se um fator de penalidade  $\varepsilon$  igual a  $\frac{10^{-1}}{E}$ . Os deslocamentos no ponto central da viga, e os respectivos valores do momento



concentrado  $M$ , são apresentados na Tabela 4.3, bem como resultados numéricos obtidos por Selke & Kikuchi (1987) utilizando a teoria clássica (Euler-Bernoulli) e a teoria de ordem superior de Essenburg.

Tabela 4.3: Deslocamentos no ponto central da viga.

Deslocamento Central [cm]			
Momento M [KN.cm]	Presente formulação	Teoria Clássica Selke & Kikuchi (1987)	Teoria de Essenburg Selke & Kikuchi (1987)
0.4	0.07160	0.0715	0.0706
0.4475	0.08008	0.0799	0.0790
0.4485	0.08008	0.0800	0.0792
0.4495	0.08008	0.0800	0.0800
0.5	0.08008	0.0800	0.0800
2.5	0.08063	0.0800	0.0800
3.0	0.08008	0.0800	0.0800
3.5	0.08008	0.0800	0.0799
5.0	0.07999	0.0800	0.0771
5.18	0.08000	0.0800	0.0769
7.5	0.08000	0.0800	0.0735
10.0	0.08000	0.0800	0.0703

Neste problema podem ser notadas claramente as limitações da teoria que se está utilizando, que não considera a deformação normal transversal, importante na resolução deste tipo de problema e não permitindo a simulação do processo de separação. Uma boa representação do problema só é obtida com o uso de uma teoria de ordem superior, como no caso dos os resultados de Selke & Kikuchi (1987), obtidos com a utilização da teoria de viga de Essenburg, e mostrados na Tabela 4.3 onde, para momento  $M = 3.5\text{ KN.cm}$ , ocorre o início da perda de contato no ponto central da viga.

A distribuição de pressão adimensionalizada ao longo da viga, a partir do ponto central até uma extremidade, é mostrada na forma de gráfica na Figura 4.12, para três valores de momentos normalizados  $\bar{M} = M/M^*$ , onde  $M^*$  é o momento para se iniciar o contato. Na Figura 4.13 reproduz-se o resultado gráfico, apresentado por Naghdi & Rubin (1989), onde este problema foi solucionado analiticamente utilizando a teoria de viga de Euler-Bernoulli, que é incapaz de fornecer pressões na região de contato; a teoria de viga de Timoshenko (T), que considera a deformação cisalhante transversal; uma teoria considerando a deformação normal transversal, sem considerar a deformação cisalhante transversal (N) e outra geral (G), considerando tanto a deformação normal como a deformação cisalhante transversal.

Deficiências similares às discutidas no problema anterior, na Seção 4.2.1, também ocorrem aqui, tais como valores negativos de pressão próximos à região de maior pressão, e valores de pressão positivos onde, segundo Naghdi & Rubin (1989), deveriam ser nulos.

Usando como base comparativa a teoria utilizada na formulação do elemento finito, qual seja, a teoria de viga de Timoshenko (T), os valores máximos de pressão apresentam alguma discrepância mas, deve-se notar que no presente trabalho as pressões foram suavizadas e, de acordo Naghdi & Rubin (1989), as pressões deveriam ser descontínuas nessas regiões. Tais discontinuidades trazem dificuldades numéricas adicionais, pois os valores de pressão são muito sensíveis ao fator de penalidade.

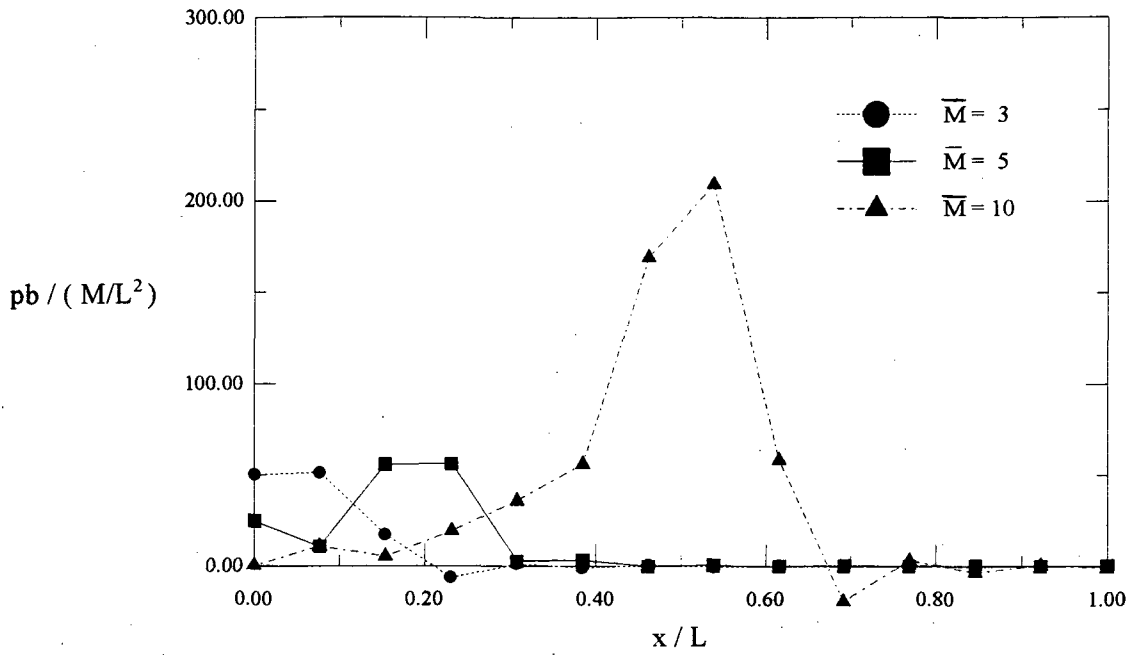


Figura 4.12: Distribuição de pressões ao longo da viga.

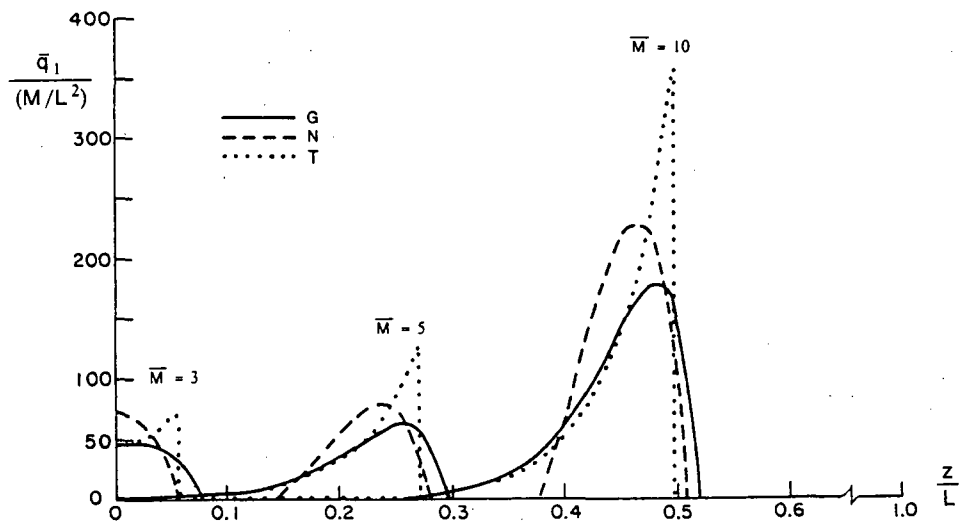


Figura 4.13: Distribuição de pressões normalizadas ao longo da viga, onde  $\bar{q}_1$  é a força de contato por unidade de comprimento e  $z$  a direção axial (Naghdi & Rubin (1989), pp. 253, Figura 3).

### 4.3 Problemas de Estruturas Submetidas a Grandes Deslocamentos e Sujeitas a Restrições Unilaterais

Nesta seção são resolvidos problemas de estruturas submetidas a grandes deslocamentos, sujeitas a restrições unilaterais. Foram analisadas uma viga bi-engastada, uma viga bi-apoiada, uma placa quadrada simplesmente apoiada e uma placa quadrada engastada em todas as arestas, todas carregadas de forma uniformemente distribuída e submetidas a condições de contato unilateral.

#### 4.3.1 Viga Carregada Uniformemente

Uma viga bi-engastada com carregamento uniformemente distribuído, sujeita a uma restrição de contato unilateral com uma superfície rígida (ver Figura 4.14), é modelada, utilizando simetria, com 8 elementos finitos lagrangianos de placa de 9 nós.

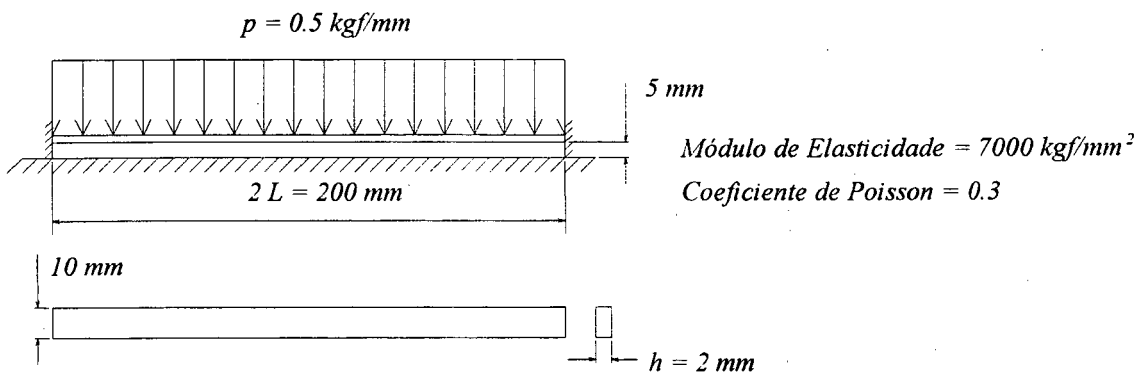
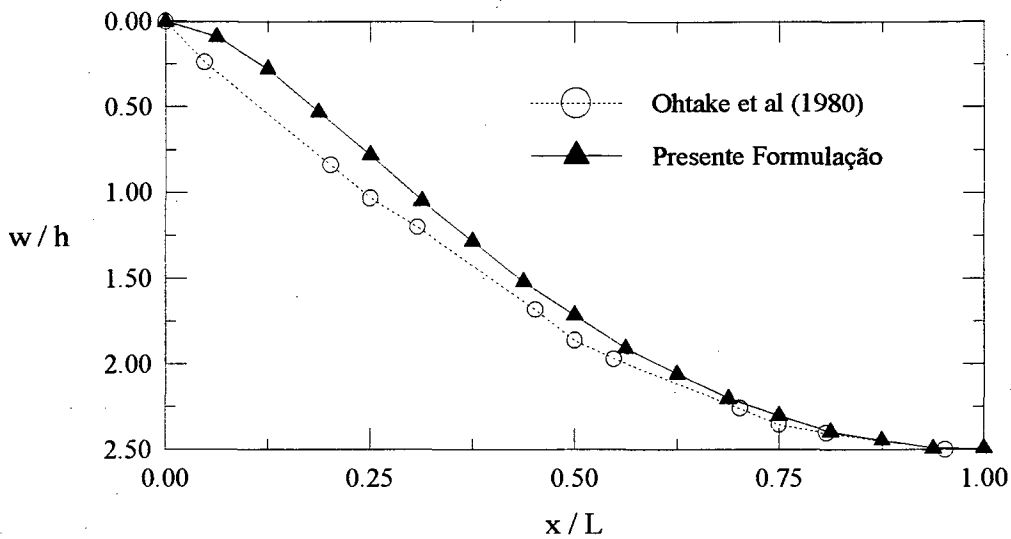


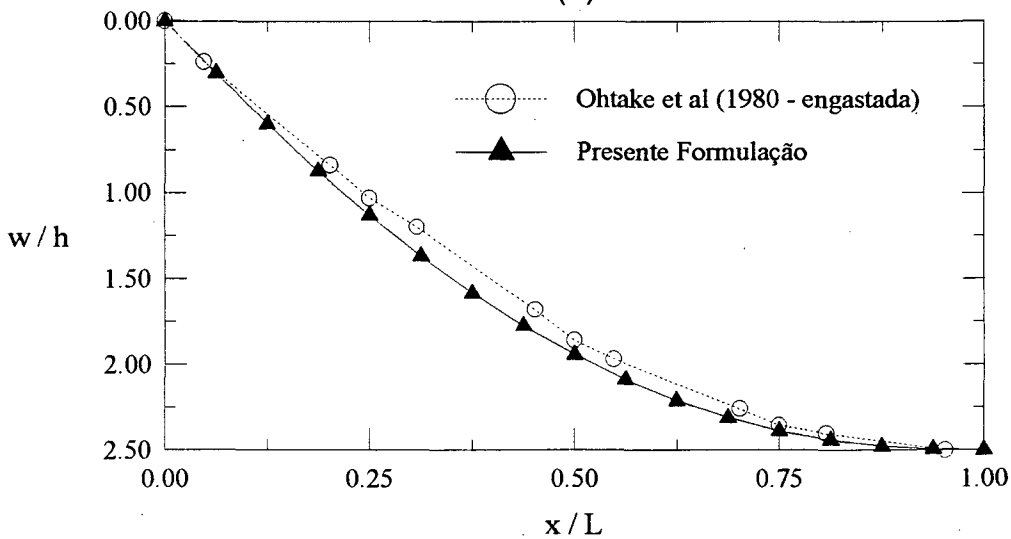
Figura 4.14: Viga bi-engastada sujeita à condições de contato unilateral.

Os resultados obtidos são apresentados na forma de gráfica na Figura 4.15(a), onde  $w$  é o deslocamento transversal e  $x$  é a distância a partir de uma extremidade engastada. Apresentam-se também os resultados encontrados por Ohtake, Oden & Kikuchi (1980).

Uma análise similar é realizada para a mesma viga, utilizando-se no entanto condições de contorno de apoio simples, nos extremos da viga. Os resultados obtidos são mostrados na Figura 4.15(b), juntamente com aqueles fornecidos por Ohtake, Oden & Kikuchi (1980) para viga engastada, como mencionado no artigo. Comparando-se as Figuras 4.15(a) e 4.15(b), verifica-se que, provavelmente, os resultados fornecidos por Ohtake, Oden & Kikuchi (1980) são para viga apoiada, e não para viga engastada, como indicado no artigo.



(a)



(b)

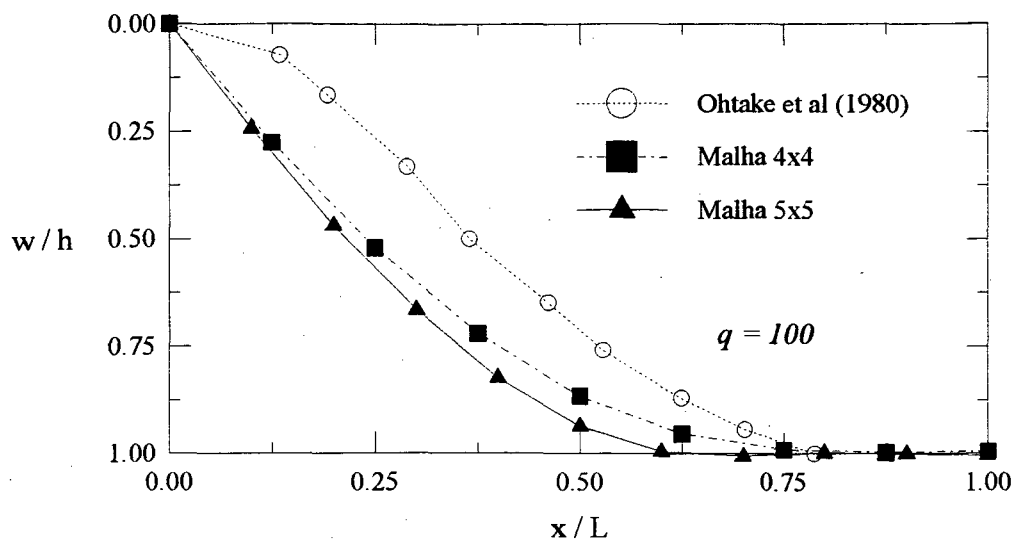
Figura 4.15: Deflexão na viga (a) bi-engastada e (b) bi-apoiada.

### 4.3.2 Placa Quadrada com Carregamento Uniforme

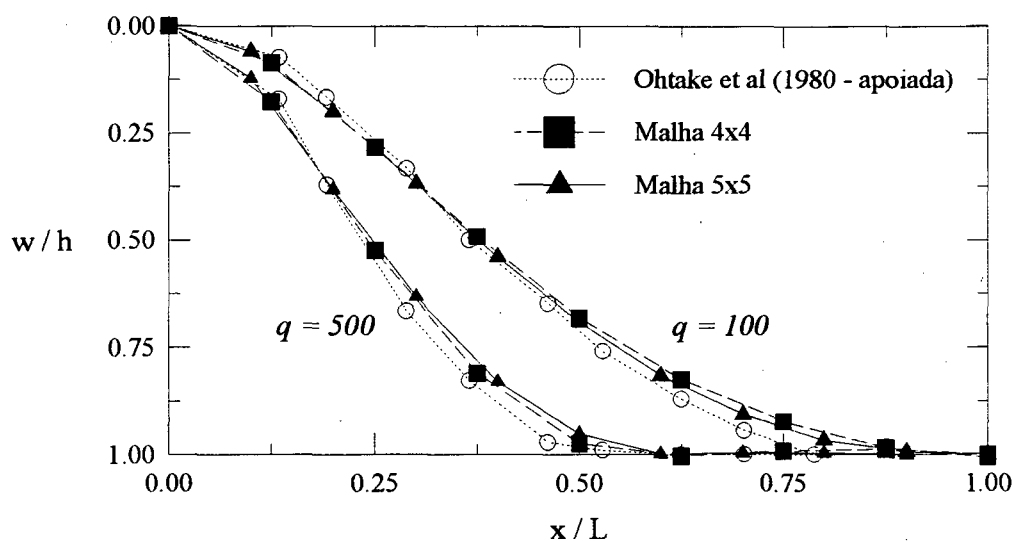
A seguir, é analisada numericamente uma placa quadrada apoiada nas quatro arestas, de lado  $2L = 120\text{mm}$ , espessura  $h$  de  $2\text{mm}$ , módulo de elasticidade  $E$  de  $7000\text{ kgf/mm}^2$ , coeficiente de Poisson  $\nu$  de  $0.3$ , submetida a um carregamento uniforme transversal  $p$ . Como condição de restrição tem-se uma superfície rígida plana à uma distância de  $2\text{mm}$ . Devido à simetria do problema, apenas um quadrante da placa é discretizado.

Os resultados obtidos utilizando-se a presente formulação para o valor de parâmetro adimensional de carga  $q$ ,  $q = 100$  e  $q = 500$  onde  $q = pL^4 / Dh$ , sendo  $p$  a carga distribuída transversal e  $D$  a rigidez à flexão da placa, com malhas de  $16$  ( $4 \times 4$ ) e  $25$  ( $5 \times 5$ ) elementos finitos lagrangianos de 9 nós, bem como resultados obtidos por Ohtake, Oden & Kikuchi (1980), são apresentados na Figura 4.16(a).

A mesma placa, engastada em todas as arestas, também foi analisada, sendo os resultados obtidos, para dois valores do parâmetro de carga  $q$ ,  $q = 100$  e  $q = 500$ , mostrados na Figura 4.16(b), bem como aqueles obtidos por Ohtake, Oden & Kikuchi (1980) para a placa apoiada. Observa-se, novamente, que os resultados encontrados para a placa engastada, com a presente formulação, comparados com os obtidos por Ohtake, Oden & Kikuchi (1980) para placa apoiada, levam à consideração de que os resultados apresentados por este último, provavelmente, são para uma placa engastada e não apoiada.



(a)



(b)

Figura 4.16: Deflexão da placa (a) apoiada e (b) engastada.

Uma comparação entre os resultados obtidos por Ohtake, Oden & Kikuchi (1980) com aqueles obtidos com a presente formulação revela algumas pequenas diferenças, possivelmente advindas do fato de que o mesmo utilizou uma teoria para placas finas, onde o efeito da deformação cisalhante transversal não é considerado.

#### 4.4 Análise da Influência do Fator de Penalidade $\varepsilon$

Como já mencionado no Capítulo 3, a escolha do fator de penalidade  $\varepsilon$  tem um papel fundamental na solução de problemas que utilizam o método da penalidade. Para analisar sua influência, resolve-se o problema da placa engastada do item 4.3.2, para um parâmetro adimensional de carga  $q = 100$ , variando-se  $\varepsilon$  entre os valores  $\frac{10^6}{E}$  e  $\frac{10^{-6}}{E}$ , onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material da estrutura que se está analisando. Os resultados obtidos para os deslocamentos transversais da placa estão apresentados, em forma gráfica, na Figura 4.17.

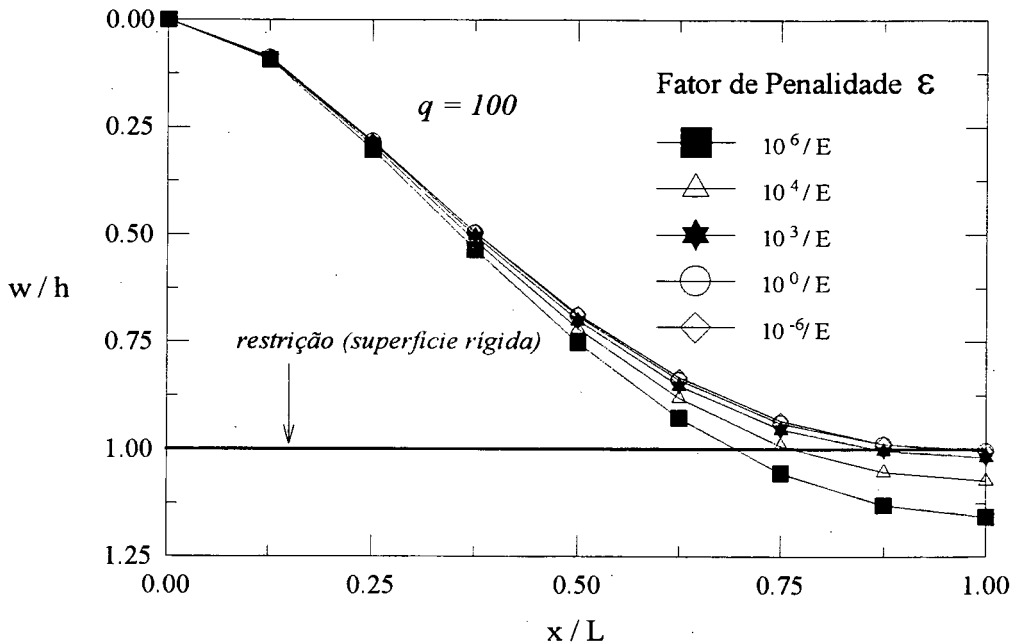


Figura 4.17: Influência do fator de penalidade  $\varepsilon$  na solução.

Analisando a Figura 4.17, pode-se notar que há uma convergência de resultados para o valor correto à partir de valores de fator de penalidade menores que  $\frac{10^3}{E}$ . Para valores maiores que este, a violação da condição de contato é grande, o que já era esperado. Outro aspecto importante relacionado com a escolha do fator de penalidade é o fato de que quanto menor seu valor, maior o número de iterações necessárias para a convergência da solução.



# **CAPÍTULO 5**

## **CONCLUSÕES E SUGESTÕES**

---

O objetivo deste trabalho foi o estudo e a implementação de um elemento finito de placa semi-espessa, utilizando a teoria de Mindlin-Reissner, para resolver problemas de contato unilateral. Uma formulação incremental do tipo lagrangiana atualizada foi utilizada, podendo-se assim resolver problemas geometricamente não-lineares. Esta formulação foi escolhida, dentre as formulações incrementais, por se ter maior facilidade na obtenção de resultados intermediários e menor esforço computacional. A desigualdade variacional, característica do problema de contato, foi resolvida (transformada numa igualdade) utilizando o método da penalidade. Tal método tem a vantagem de apresentar um número de incógnitas menor que outras formulações, tais como as formulações mistas.

Resultados numéricos utilizando um programa codificado em linguagem FORTRAN foram obtidos e comparados com resultados analíticos e numéricos encontrados na bibliografia, demonstrando o campo de aplicabilidade e as limitações da presente formulação.

Como principal limitação tem-se a não previsão de regiões de separação, quando estas ocorrem, tal como demonstra o problema da seção 4.4.2, apresentando valores de pressões altos e perturbações nesses valores na periferia da região de contato, o que não condiz com a realidade. Os resultados obtidos no problema 4.4.2 comprovam os trabalhos teóricos de Essenburg (1975) e Naghdi & Rubin (1989) e

numérico de Selke & Kikuchi (1987), onde a região de separação e uma distribuição suave de pressões somente são obtidas ao se utilizar uma teoria que considera a deformação normal transversal. Na teoria de placas utilizada neste trabalho (Mindlin-Reissner), as hipóteses simplificadoras não levam em consideração a deformação normal transversal.

Outros resultados numéricos, envolvendo pequenas e grandes deflexões, foram apresentados, mostrando-se satisfatórios se comparados com soluções analíticas e numéricas encontradas na literatura.

Testes numéricos indicaram que a escolha do fator de penalidade entre os valores de  $\frac{10^{-3}}{E}$  e  $\frac{10^{-2}}{E}$  apresentam bons resultados.

Como sugestões para prosseguimento do trabalho ou outros trabalhos que sigam a mesma linha podemos destacar :

- implementação de teorias de placa de ordem superior, onde a deformação normal transversal é considerada, podendo-se assim prever regiões de separação, quando estas ocorrem, e ter uma distribuição melhor dos valores de pressão;

- escolha automática do fator de penalidade, podendo ele ainda ser variável ao longo do processo iterativo, retirando do usuário essa incumbência e calculando um fator adequado para cada iteração, visto que a rigidez também vai se alterando;

- formulação de elementos de cascas sob condições de contato, abrangendo assim a aplicabilidade prática do trabalho;

- como nas regiões de contato existem deformações severas e localizadas e altos gradientes de pressões, recomenda-se a implementação de um refino de malha automático, nessas regiões, feito adaptativamente.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Atkin, R.J. & Fox, N. (1980) - **"An Introduction to the Theory of Elasticity"**, Logman, London.
- Boresi, P.A. & Lynn, P.P. (1974) - **"Elasticity in Engineering Mechanics"**, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Carey, G.F. & Oden, J.T. (1983) - **"Finite Elements: a Second Course"**, vol. II, Prentice-Hall, New Jersey.
- Chia, C.-Y. (1980) - **"Nonlinear Analysis of Plates"**, McGraw Hill, Inc.
- Cook, D.R., Malkus, D.S. & Plesha, M.E. (1988) - **"Concepts and Applications of Finite Element Analysis"**, 3<sup>rd</sup> Edition, John Wiley & Sons, New York.
- Duvaut, G. & Lions, J.L. (1974) - **"Problemes Unilateraux dans la Theorie de la Flexion Forte des Plaques"**, J. Mecanique, n. 13, pp. 51-74.
- Duvaut, G. & Lions, J.L. (1976) - **"Inequalities in Mechanics and Physics"**, Springer-Verlag, Berlin.
- Essenburg, F. (1962) - **"On Surface Constraints in Plate Problems"**, J. Appl. Mech., Trans. ASME, n. 29, pp. 342-344.
- Essenburg, F. (1975) - **"On the Significance of the Inclusion of the Effect of Transverse Normal Strains in Problems Involving Beams with Surface Constraints"**, J. Appl. Mech., vol. 42, n. 1, pp. 127-132.

- Fonseca, J.S.O. (1990) - **"Uma Formulação de Elementos Finitos Sólidos para Problemas com Não-Linearidades Geométrica e Material"**, Dissertação de Mestrado, CPGEM-UFSC, Florianópolis.
- Fung, Y.C. (1965) - **"Foundations of Solid Mechanics"**, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Gadala, M.S. & Oravas, G.A.E. (1984) - **"Numerical Solutions of Nonlinear Problems of Continua - I"**, Computers & Structures, vol. 19, pp. 865-877.
- Hinton, E. & Campbell, J.S. (1974) - **"Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Square Method"**, Int. J. Num. Meth. Eng., vol 8, pp. 461-480.
- Hughes, T.J.R. (1987) - **"The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis"**, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Hughes, T.J.R., Cohen, M. & Haroun, M. (1978) - **"Reduced and Selective Integration Techniques in Finite Element for Plate Bending"**, Nuclear Engng. and Design, vol. 46, pp. 203-222.
- Huneek, I. (1993) - **"On a Penalty Formulation for Contact-Impact Problems"**, Computers & Structures, vol. 48, n.2, pp. 193-203.
- Jankovich, E., Leblanc, F. & Durand, M. (1981) - **"A Finite Element Method for the Analysis of Rubber Parts, Experimental and Analytical Assessment"**, Computers & Structures, vol. 4, n. 5-6, pp. 385-391.
- Kikuchi, N. & Oden, J.T. (1984) - **"Contact Problems in Elastostatics"**, em "Finite Elements - Special Problems in Solid Mechanics", vol. V, J.T. Oden and G.H. Carey, Cap. 4, Prentice Hall, New Jersey.
- Lo, K.H., Christensen, R.M. & Wu, E.M. (1977) - **"A High-Order Theory of Plate Deformation, Part 1: Homogeneous Plates"**, J. Appl. Mech., vol. 44, n. 4, pp. 663-668.

- Malkus, D.S. & Hughes, T.J.K. (1978) - **"Mixed Finite Element Methods - Reduced and Seletive integration Techniques: a Unification of Concepts"**, J. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., vol. 15, pp. 63-81.
- Malvern, L.E. (1969) - **"Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium"**, Prentice-Hall.
- Marczak, R.J., Luersen, M.A. & Selke, C.A.C. (1993) - **"Local Instability Analysis of Thin Walled Structural Members Using Plate Finite Elements"**, 12<sup>nd</sup> SMIRT - International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Stuttgart, Germany, vol. B - Computational Mechanics - pp. 297-302.
- Mindlin, R.D. (1951) - **"Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates"**, J. Appl. Mech., vol. 18, pp. 31-38.
- Mourão, R.P. & Selke, C.A.C. (1992) - **"Um Elemento Finito de Casca para Análise de Problemas com Não-Linearidade Geométrica"**, Anais do VII SIBRAT, Florianópolis, vol. I, pp. 137-149.
- Naghdi, P.M. & Rubin, M.B. (1989) - **"On the Significance of Normal Cross-Sectional Extension in Beam Theory with Aplication to Contact Problems"**, Int. J. Solids Structures, vol. 25, n. 3, pp. 129-265.
- Oden, J.T. (1972) - **"Finite Elements of Nonlinear Continua"**, McGraw-Hill.
- Oden, J.T. & Kikuchi, N. (1982) - **"Finite Element Methods for Constrained Problems in Elasticity"**, Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 18, pp. 701-725.
- Ohtake, K., Oden, J.T. & Kikuchi, N. (1980) - **"Analysis of Certain Unilateral Problems in von Karman Plate Theory by a Penalty Method" - Part 1 : "A Variational Principle with Penalty"; Part 2 : "Approximation and Numerical Analysis"**, Comp. Methods Appl. Mech. Eng., vol. 24, pp. 187-213 e 317-337.

- Papadopoulos, P. & Taylor, R.L. (1993) - **"A Simple Algorithm for Three-Dimensional Finite Element Analysis of Contact Problems"**, Computers & Structures, vol. 46, n. 6, pp. 1107-1118.
- Pian, T.H.H. & Tong, P. (1987) - **"Mixed and Hybrid Finite-Element Methods"**, em "Finite Element Handbook", Part 2, "FEM Fundamentals", H. Kardestuncer, Cap. 5, McGraw-Hill Book Company.
- Pica, A., Wood, R.D. & Hinton, E. (1980) - **"Finite Element Analysis of Geometrically Nonlinear Plate Behavior Using a Mindlin Formulation"**, Computers & Structures, vol. 11, pp. 203-215.
- Peric, D. & Owen, R.J. (1992) - **"Computational Model for 3-d Contact Problems with Friction Based on the Penalty Method"**, Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 35, pp. 1289,1309.
- Reddy, J.N. (1984) - **"A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates"**, J. Appl. Mech., vol. 51, pp. 745-752.
- Reissner, E. (1945) - **"The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates"**, J. Appl. Mech., vol. 12, A69-A77.
- Reissner, E. (1981) - **"A Note on Bending of Plates Including the Effects of Transverse Shearing and Normal Strains"**, ZAMP, n. 32, pp. 764-767.
- Selke, C.A.C. (1986) - **"Local Unilateral Contact Problems of Beams and Plates Undergoing Large Deflections"**, Ph.D. Thesis, The University of Michigan, Ann Arbor.
- Selke, C.A.C. & Kikuchi, N. (1987) - **"Local Unilateral Contact Problems in Beams Using a Higher Order Theory"**, COBEM 87 - IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Florianópolis, Dezembro/1987, vol. II, pp. 551-554.

- Simo, J.C., Wriggers, P. & Taylor, R.L. (1985) - **"A Perturbed Lagrangian Formulation for the Finite Element Solution of Contact Problems"**, Com. Meth. Appl. Mech. Eng., vol. 48, n. 2, p. 193-203.
- Simo, J.C. & Laursen, T.A. (1992) - **"An Augmented Lagrangian Treatment of Contact Problems Involving Friction"**, Computers & Structures, vol. 42, n. 1, pp. 97-116.
- Simo, J.C., Wriggers, P., Schweizerhof, K.H. & Taylor, R.L. (1986) - **"Finite Deformation Post-Buckling Analysis Involving Inelasticity and Contact Constraints"**, Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 23, pp. 779-800.
- Spencer, A.J.M. (1980) - **"Continuum Mechanics"**, Logman, New York.
- Stein, E. & Wriggers, P. (1984) - **"Stability of Rods with Unilateral Constraints, a Finite Element Solution"**, Computers & Structures, vol. 9, n 12, pp. 205-211.
- Sussman, T. & Bathe, K.-J. (1987) - **"A Finite Element Formulation for Nonlinear Incompressible Elastic and Inelastic Analysis"**, Computers & Structures, vol. 26, n. 112, pp. 375-409.
- Timoshenko, S. & Woinowsky-Krieger, S. (1959) - **"Theory of Plates and Shells"**, 2<sup>nd</sup> Edition, McGraw-Hill, New York.
- Torigaki, T. (1989) - **"Contact and Impact Problems Using Adaptive Finite Element Methods"**, Ph.D. Thesis, The University of Michigan, Ann Arbor.
- Washizu, K. (1982) - **"Variational Methods in Elasticity and Plasticity"**, 3<sup>rd</sup> Edition, Pergamon Press, Oxford.
- White, D.W. & Abel, J.F. (1990) - **"Accurate and Efficient Nonlinear Formulation of a Nine-Node Shell Element with Spurious Mode Control"**, Computers & Structures, vol. 35, n. 6, pp. 621-641.

- Wong, L.B. & Belitschko, T. (1987) - **"Assumed Strain Stabilization Procedure for the 9-node Lagrange Plane and Plate Elements"**, Eng. Comput., vol. 4, pp. 229-239.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. & Too, J.M. (1971) - **"Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells"**, Int. J. Num. Meth. Eng, vol. 3, pp. 275-290.